VOKABELN DER ZAHLENTHEORIE

1) Primzahlen
2) Induktionsanfang
3) Teilbarkeitsdefinition
4) ggT (Anwendung)
5) Prämisse
6) Peano Axiome
7) Euklidischer Algorithmus
8) teilerfremd
9) kgV (Anwendung)
10) Primfaktorzerlegung
11) Induktionsschluss
12) Division mit Rest

S 139 Nr. 2 $(5^n+7) \bmod 4 = 0$; $n \geq 0$

Behauptung: $5^n+7 = 4\cdot k$, $k\in\mathbb{Z}$

Induktionsanfang: $n=0$ $\quad 5^0+7 = 1+7 = 8 = 4\cdot \underbrace{2}_{\in\mathbb{Z}}$ ✓

Prämisse: Für alle $n\geq 0$ und $k\in\mathbb{Z}$ gilt $5^n+7=4\cdot k$.

Induktionsschluss: $n+1$: $5^{n+1}+7 = 5\cdot 5^n+7 = 4\cdot k$

$$5\cdot(5^n+7)-28 = 4\cdot k_2$$
$$5\cdot 5^n+35-28 = 4\cdot k_2$$
$$5\cdot(5^n+7) - 4\cdot 7 = 4\cdot k_2$$
$$5\cdot 4\cdot k_1 - 4\cdot 7 = 4\cdot k_2$$
$$4\cdot(5k_1-7) = 4\cdot k_2 \quad |:4$$

$$\underbrace{5\cdot k_1-7}_{\mathbb{Z}-\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}} = k_1$$

$5 \cdot 5^n + 7 = 4 \cdot k_1$

$\underbrace{(5^n + 7)} + 4 \cdot 5^n = 4 \cdot k_1$

$4 \cdot k_2 + 4 \cdot 5^n$

$4 \cdot (k_2 + 5^n) = 4 \cdot k_1$

$(\mathbb{Z} + \mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ ✓

4) $(1+x)^n \geq 1 + nx \; ; \underbrace{n \in \mathbb{N}}_{\text{Variable}} \; ; \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{Parameter}}$

$n=1$: $1+x \overset{?}{\geq} 1+x \quad |-x$

$1 \overset{?}{\geq} 1$ ✓

Prämisse: Es gilt $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

$n+1: \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot x$

$$\underline{(1+x)^n} \cdot (1+x) \geq \underline{1+n\cdot x}+x$$

$$(1+nx)\cdot(1+x) \geq 1+nx+x$$

$$1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+x \quad | -nx-x-1$$

$$nx^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

da $x^2 \geq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\Rightarrow (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+x)^n + x$$

$$(1+x)^n + x\cdot(1+x)^n \geq (1+x)^n + x \quad | -(1+x)^n$$

$$x\cdot(1+x)^n \geq x \quad | :x \quad x <> 0$$

$$(1+x)^n \geq 1$$

$x > 0 \quad \swarrow \qquad \searrow \quad x < 0 \qquad x = 0$

7) $n^n \geq n! \quad , \; n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)^{n+1} \geq (n+1)!$$

$$(n+1)^n \cdot (n+1) \geq (n+1) \cdot n!$$

$$(n+1)^n \cdot (n+1) \geq (n+1) \cdot n^n \qquad | :(n+1) <> 0$$

$$(n+1)^n \geq n^n \qquad | \sqrt[n]{\;}$$

$$n+1 \geq n \qquad | -n$$

$$1 \geq 0 \qquad \checkmark$$