MATHEMATIK

26.06.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was beschreibt der Differenzenquotient?
- ✓ Wie kann man sich die Steigung im $\mathbb{R}^3$ vorstellen?
- ✓ Was bedeutet das für die Ableitungen?
- ✓ Was ist eine Differentialgleichung (implizit und explizit?
- ✓ Was beschreibt die Ordnung einer Differentialgleichung?
- ✓ Welche Funktionsklassen benötigen die Kettenregel?
- ✓ Wann spricht man von einer allgemeinen, speziellen Lösung?
- ✓ Was sind die Integrationskonstanten?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben und Anwendungen von Doppelintegralen.
- ✓ Allgemeine Definition der Lösungsverfahren einer DGL?
- ✓ Wie erhält man die Lösung durch Trennung der Variablen?
- ✓ Welche Typen von DGL sollte man substituieren?
- ✓ Was ist eine lineare Differentialgleichung?
- ✓ Was versteht man unter Variation der Konstanten?
- ✓ Was ist eine Störfunktion und welche Rolle spielt sie?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN NEU

1) Berechnen Sie zu den gegebenen Differentialgleichungen der 1. Ordnung deren Lösung unter Berücksichtigung der Randwerte.

   a) $y'' = 8 \cdot e^{2x+1} + 2,\ y(0) = e \wedge y(1) = 2e^3 - e$

   b) $y' = \frac{3}{(1-x)^2},\ y(2) = 5$

2) Geben Sie zu der gegebenen Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung den dazugehörigen Funktionsterm an.

   a) $x(t) = sin(2x - 3)$

   b) $y(x) = \frac{e^{2-5x}}{10}$

LÖSUNGSVERFAHREN VON DGL

Um eine Differentialgleichung effizient zu lösen, muss im ersten Schritt der Typ der Gleichung bestimmt werden, um somit das Verfahren auszuwählen:

- <u>Trennung der Variablen</u>: $y' = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

- <u>Substitution</u>: $y' = f(ax + by + c)$

  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

- <u>Lineare DGL</u>: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

- <u>Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten</u>: $y' + ay = 0$ (*homogen*)

  $y' + ay = g(x)$ (*inhomogen*)

LÖSUNGSVERFAHREN I

Handelt es sich um eine separabel DGL, dann wird die Ableitung als Differenzenquotient ausgedrückt $y' = \frac{dy}{dx}$ und anschließend die Lösung mittels **Trennung der Variablen** anhand der folgenden Schritte bestimmt:

1. **Trennung** der Variablen und deren Differentiale

2. **Integration** auf beiden Seiten

3. **Auflösen** der Gleichung in die implizite Form $F_1(y) = F_2(x)$

4. **Bestimmung** der **Integrationskonstante** via Randwerte

TIPP:
Bei der Integration einer DGL entstehen häufig logarithmische Terme.
Beim Auflösen nach *y* muss der Logarithmus durch Potenzrechnung aufgehoben werden, so dass es sich empfiehlt als Integrationskonstante ebenfalls einen logarithmischen Term $ln|C|$ zu benutzen.

LÖSUNGSVERFAHREN II

<u>Beispiel zur Trennung der Variablen</u>: $y' = e^{x-y}, y(0) = 1$

1. **Trennung** der Variablen und deren Differentiale:

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} \Rightarrow e^y\, dy = e^x\, dx$$

2. **Integration** auf beiden Seiten

$$\int e^y\, dy = \int e^x\, dx \;\Rightarrow e^y = e^x + C$$

$$\boldsymbol{y = ln|e^x + e - 1|}$$

3. **Auflösen** der Gleichung in die implizite Form $F_1(y) = F_2(x)$

$$\ln(e^y) = \ln(e^x + C) \Rightarrow y = ln|e^x + C|$$

4. **Bestimmung** der **Integrationskonstante** via Randwerte

$$y(0) = 1 \Rightarrow ln|e^0 + C| = ln|1 + C| = 1 \Rightarrow 1 + C = e^1 \Rightarrow C = e - 1$$

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die gesuchte Lösung der Differentialgleichung und berechnen die Integrationskonstante anhand der Randwerte.

   a) $y' = (y+1) \cdot sin(x); \;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$

   b) $x + yy' = 0, \;\; y(0) = 2$

2) Die Bewegung einer Masse, die durch eine konstante Kraft beschleunigt wird und einer Geschwindigkeit *v* proportionalen Reibungskraft unterliegt, genüge der DGL:

$$10 \cdot \frac{dv}{dt} + v = 40, \text{ mit } v(0) = 10$$

   Wie lautet das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v = v(t)$?
   Welche Endgeschwindigkeit v_e erreicht die Masse?

LÖSUNGSVERFAHREN III

In einigen Fällen kann durch eine geeignete Substitution eine explizit definierte DGL in eine separable überführt werden.
Anschließend nutzt man wieder das Verfahren der Trennung der Variablen:

1. Substituition

Typ	$\boldsymbol{y' = f(ax + by + c)}$	$\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$
	$u = ax + by + c$	$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = u \cdot x$
	$u' = a + by' \ \wedge y' = f(u)$	$y' = 1 \cdot u + x \cdot u' \wedge y' = f(u)$
	$u' = a + b \cdot f(u)$	$u' = \frac{f(u) - u}{x}$

2. Trennung der Variablen

3. Resubstitution

LÖSUNGSVERFAHREN IV

Beispiel zur Substitution: $y' = 2x - y$

1. **Substitution vom Typ:** $\boldsymbol{y' = f(ax + by + c)}$

$$u = 2x - y + 0 \Rightarrow u' = 2 - y' \Rightarrow y' = 2 - u'$$

$$y' = 2x - y \Leftrightarrow 2 - u' = u \Leftrightarrow -u' = u - 2$$

2. **Trennung** der Variablen:

$$-\frac{du}{dx} = u - 2 \Rightarrow \frac{du}{u-2} = -dx$$

$$\int \frac{du}{u-2} = -\int dx \Rightarrow ln|u-2| = -x + ln|C|$$

$$ln\left|\frac{u-2}{C}\right| = -x \Rightarrow \frac{u-2}{C} = e^{-x} \Rightarrow u = C \cdot e^{-x} + 2$$

LÖSUNGSVERFAHREN V

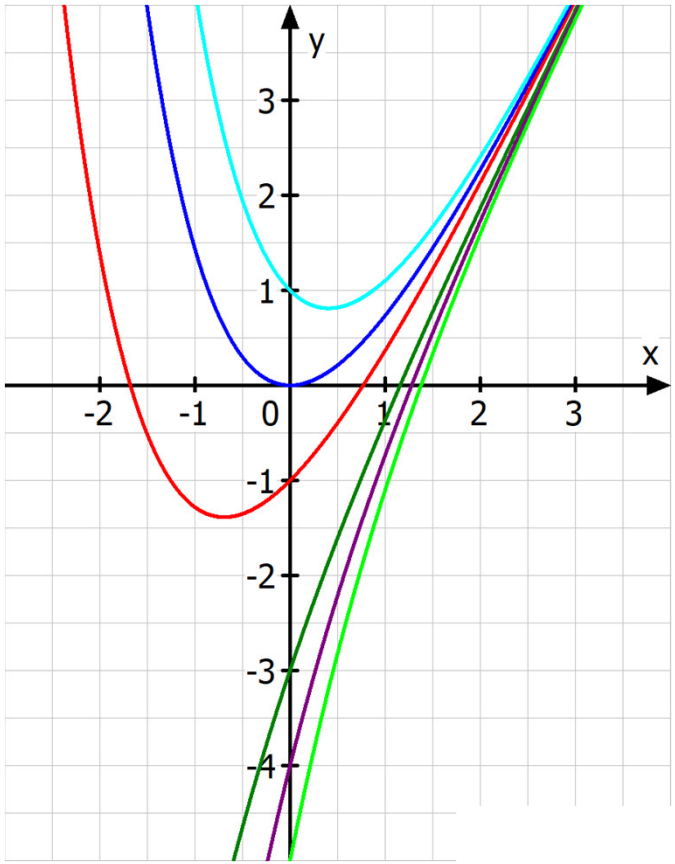
Beispiel zur Substitution: $y' = 2x - y$

3. Resubstitution der Gleichung:

$$u = C \cdot e^{-x} + 2 \ \wedge \ \mathrm{u} = 2\mathrm{x} - \mathrm{y}$$

$$2\mathrm{x} - \mathrm{y} = C \cdot e^{-x} + 2$$

$$\mathbf{y} = -\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}$$



LÖSUNGSVERFAHREN VI

Beispiel zur Substitution: $y' = \frac{x+2y}{x} = 1 + 2 \cdot \frac{y}{x}$

1. **Substitution vom Typ:** $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u + x \cdot u'$$

$$y' = 1 + 2 \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow u + x \cdot u' = 1 + 2 \cdot u$$

$$x \cdot u' = 1 + u$$

2. **Trennung** der Variablen:

$$x \cdot \frac{du}{dx} = 1 + u \Rightarrow \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln|1+u| = ln|x| + ln|C| = ln|C \cdot x|$$

$$1 + u = C \cdot x \Rightarrow u = C \cdot x - 1$$

LÖSUNGSVERFAHREN VII

Beispiel zur Substitution:

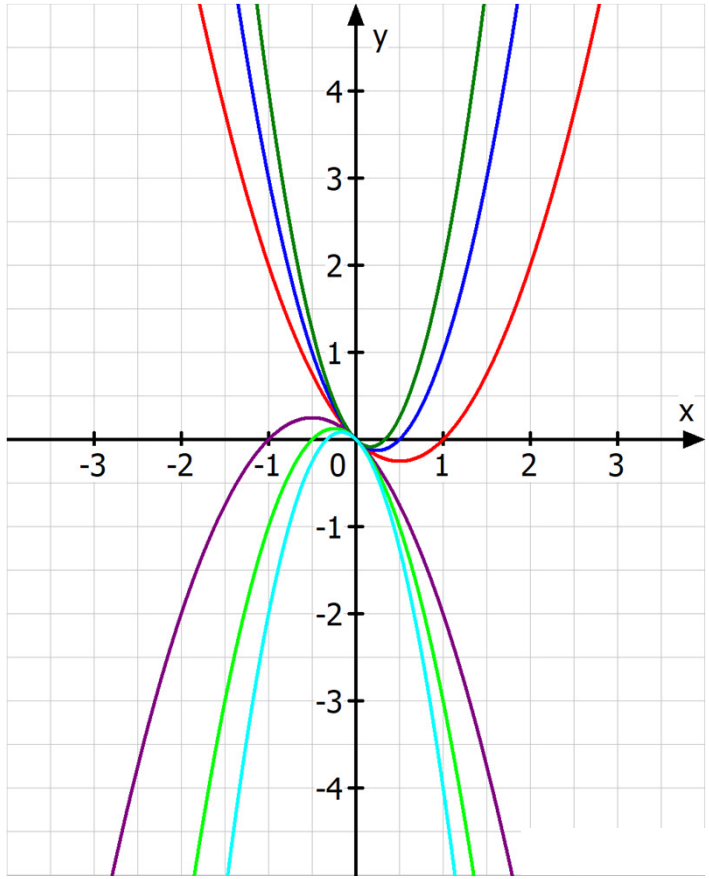
$$y' = \frac{x+2y}{x} = 1 + 2 \cdot \frac{y}{x}$$

3. Resubstitution der Gleichung:

$$u = C \cdot x - 1 \wedge \mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot u$$

$$y = x \cdot (C \cdot x - 1)$$

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x}$$



AUFGABEN

Bestimmen Sie die gesuchte Lösung der Differentialgleichung mittels einer geeigneten Substitution und geben ebenfalls die spezielle Lösung.

a) $x^2y' = y^2 - xy; \quad y(-1) = 1$

TYP II: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

b) $(1 + x^2) \cdot yy' = x \cdot (1 + y^2), \; y(1) = -3$

TYP I: $y' = f(ax + by + c)$

LÖSUNGSVERFAHREN VIII

Hat eine DGL die Form $\boldsymbol{y' + f(x) \cdot y = g(x)}$, dann handelt es sich um eine sogenannte **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**.

Der Ausdruck $g(x)$ wird auch **Störfunktion** genannt.
Ist $g(x) = 0$, so handelt es sich um eine **homogene lineare DGL** (sonst *inhomogen*).

Allgemeine Herleitung der Integration einer homogenen linearen DGL: $\boldsymbol{y' + f(x) \cdot y = 0}$

Trennung der Variablen: $\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -f(x)dx$

Integration: $\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx \Rightarrow ln|y| = -\int f(x)dx + ln|C|$

Zusammenfassung: $ln|y| - ln|C| = ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int f(x)dx$

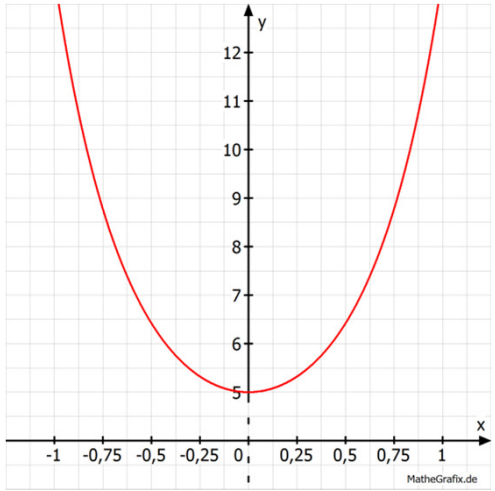
Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C \cdot e^{-\int f(x)dx}}; C \in \mathbb{R}$

LÖSUNGSVERFAHREN IX

<u>Beispiel zur homogenen linearen DGL</u>: $y' - 2xy = 0; y(0) = 5$

1. **Trennung** der Variablen: $\frac{dy}{y} = 2x\,dx$
2. **Integration** beider Seiten**:** $\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \Rightarrow ln|y| = x^2 + ln|C|$
3. **Zusammenfassung:** $ln|y| - ln|C| = ln\left|\frac{y}{C}\right| = x^2 \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{x^2}$
4. **Allgemeine Lösung:** $y = C \cdot e^{x^2}; C \in \mathbb{R}$
5. **Spezielle Lösung:** $y(0) = 5 \implies C = 5$

$$\boldsymbol{y = 5 \cdot e^{x^2}}$$



LÖSUNGSVERFAHREN X

Für den Fall einer **inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung** existieren zwei Lösungsmethoden:

- Variation der Konstanten:
  Diese Methode basiert im Wesentlichen darauf, dass die Integrationskonstante variiert, d.h. durch eine Funktion in Abhängigkeit von x ersetzt wird.

$$\boldsymbol{y(x) = K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}}$$

- Aufsuchen einer partikulären Lösung:
  Die gesuchte Gleichung wird als Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen linearen DGL $\boldsymbol{y_0 = y_0(x)}$ und der partikulären Lösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y_p = y_p(x)}$ verechnet.

$$\boldsymbol{y(x) = y_0(x) + y_p(x)}$$

LÖSUNGSVERFAHREN XI

<u>Beispiel zur Variation der Konstanten:</u> $\boldsymbol{y' - 3y = x \cdot e^{4x}}$

1. Lösung der homogenen DGL: $y' - 3y = 0 \Rightarrow y_0 = K \cdot e^{3x}$

2. Variation der Konstanten: $y = K(x) \cdot e^{3x}$

   $y' = K'(x) \cdot e^{3x} + 3 \cdot K(x) \cdot e^{3x}$

3. Einsetzen in die inhomogene DGL: $y' - 3y = x \cdot e^{4x}$

   $K'(x) \cdot e^{3x} + \underbrace{3 \cdot K(x) \cdot e^{3x} - 3 \cdot K(x) \cdot e^{3x}}_{\mathbf{0}}$

   $K'(x) \cdot e^{3x} = x \cdot e^{4x}$

4. Allgemeinen Lösung: $K'(x) = x \cdot e^{x} \Rightarrow K(x) = (x-1) \cdot e^{x} + C$

   $\mathrm{y} = [(x-1) \cdot e^{x} + C] \cdot e^{3x} = \boldsymbol{(x-1) \cdot e^{4x} + C \cdot e^{3x}}$

LÖSUNGSVERFAHREN XII

<u>Beispiel zur partikulären Lösung:</u> $\boldsymbol{y' - tan(x) \cdot y = 2 \cdot sin(x)}$

1. Lösung der homogenen DGL: $y' - tan(x) \cdot y = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{C}{cos(x)}$

2. Wahl des Lösungsansatz: $\boldsymbol{y_p = A \cdot cos(x)}$,
   da durch Einsetzen auf der linken Seite die
   Störfunktion auf der rechten Seite gebildet werden kann.

   $y_p{}' = -A \cdot sin(x)$

3. Einsetzen in die inhomogene DGL: $y' - tan(x) \cdot y = 2 \cdot sin(x)$

   $-A \cdot sin(x) - \frac{sin(x)}{cos(x)} \cdot A \cdot cos(x) = 2 \cdot sin(x)$

4. Allgemeine Lösung: $y = y_0 + y_p = \frac{C}{cos(x)} + (-1) \cdot cos(x) = \boldsymbol{\frac{C - cos^2(x)}{cos(x)}}$

AUFGABEN

Bestimmen Sie die gesuchte Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

a) Variation der Konstanten:

$$y' \cdot sin(x) - y \cdot cos(x) = 4 \cdot sin^4(x)$$

b) Bestimmung der partikulären Lösung:

$$y' + \frac{y}{x} = cos(x)$$

LÖSUNGSVERFAHREN XIII

Für den Fall einer **linearen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

$$\boldsymbol{y' + a \cdot y = g(x)}$$

nutzt man zur Bestimmung der Lösung - wie in den Abschnitten zuvor erklärt - ebenfalls das Verfahren der Variation der Konstanten oder berechnet die Funktion durch eine partikulärer Lösung.

Zur Berechnung der gesuchten Funktion durch das partikuläre Verfahren muss neben der Lösung des homogenen Systems y_0 auch eine beliebige Funktion sprich partikuläre Lösung y_p gefunden werden.

Beachtet man die Definition der DGL, dann sollte die partikuläre Lösung y_p stets aus der gleichen Funktionsklasse (trigonometrisch, exponentiell,…) wie die Störfunktion $g(x)$ selber sein, damit die Gleichung einfach zu lösen ist.

LÖSUNGSVERFAHREN XIV

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Konstante Funktion	$y_p = c_0$
Lineare Funktion	$y_p = c_1 \cdot x + c_0$
Quadratische Funktion	$y_p = c_2 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_0$
Polynomfunktion vom Grade n	$y_p = c_n \cdot x^n + \cdots + c_1 \cdot x + c_0$
$g(x) = A \cdot sin(\omega \cdot x)$	$y_p = c_1 \cdot sin(\omega \cdot x) + c_2 \cdot cos(\omega \cdot x)$
$g(x) = B \cdot cos(\omega \cdot x)$	Oder
$g(x) = A \cdot sin(\omega \cdot x) + B \cdot cos(\omega \cdot x)$	$y_p = c \cdot sin(\omega \cdot x + \varphi)$
$g(x) = A \cdot e^{b \cdot x}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{b \cdot x}; b \neq -a \\ C \cdot x \cdot e^{b \cdot x}; b = -a \end{cases}$

LÖSUNGSVERFAHREN XV

<u>Beispiel zur linearen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten :</u>

$$\boldsymbol{y' + 2 \cdot y = 2 \cdot x^2 - 4}$$

1. Lösung der homogenen DGL: $y' + 2 \cdot y = 0 \Rightarrow y_0 = C \cdot e^{-2x}$

2. Wahl des Lösungsansatz: $\boldsymbol{y_p = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$,

   $$\boldsymbol{y_p{}' = 2a \cdot x + b}$$

3. Einsetzen in die inhomogene DGL: $(2a \cdot x + b) + 2 \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) = 2 \cdot x^2 - 4$

   $$2a \cdot x^2 + (2a + 2b) \cdot x + (b + 2c)$$
   $$=$$
   $$2 \cdot x^2 \quad + \quad 0 \cdot x \quad + \quad 4$$

LÖSUNGSVERFAHREN XVI

<u>Beispiel zur linearen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten :</u>

$$\boldsymbol{y' + 2 \cdot y = 2 \cdot x^2 - 4}$$

4. Entwicklung der Gleichungen:

$$\left| \begin{array}{lll} 2a & = 2 & \Rightarrow a = 1 \\ 2a + 2b & = 0 & \Rightarrow b = -1 \\ b + 2c & = -4 & \Rightarrow c = -1{,}5 \end{array} \right|$$

5. Allgemeine Lösung:

$y_0 = C \cdot e^{-2x}$ (homogene Lösung)

$$y_p = x^2 - x - 1{,}5$$

$$y = y_0 + y_p$$

$$\boldsymbol{y = C \cdot e^{-2x} + x^2 - x - 1{,}5}$$

AUFGABEN

Bestimmen Sie die zugrundeliegende Funktion
der linearen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

a) Bestimmung der partikulären Lösung :

$$y' + 5y = -26 \cdot sin(x)\,; \;\; y(0) = 0$$

b) Variation der Konstanten:

$$y' + 3y = e^x + 2 \cdot cos(2x)$$

JIPIEHHH, ES IST GESCHAFFT!!!!!