MATHEMATIK

19.06.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie entsteht eine Funktion im $\mathbb{R}^3$?
- ✓ Was wird mittels eines Doppelintegrals berechnet?
- ✓ Was bedeuten feste Grenzen grafisch gesehen?
- ✓ Wie löst man ein Doppelintegral mit festen Grenzen?
- ✓ Wie kann die Grundfläche variiert werden?
- ✓ Was darf man bei festen Grenzen, jedoch nicht bei variablen?
- ✓ Wie erhält man die Integralgrenzen?
- ✓ Wo bzw. wie spielen die Funktionsgrenzen eine Rolle?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

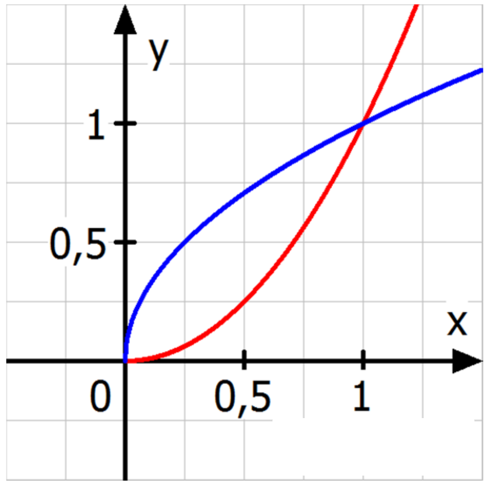
- ✓ Aufgaben und Anwendungen von Doppelintegralen.
- ✓ Wie war das nochmal mit dem Differenzenquotient?
- ✓ Was bedeutet die Steigung einer Funktion der Form $z = f(x; y)$?
- ✓ Wie funktioniert die partielle Differentiation n-ter Ordnung?
- ✓ Wann sprechen wir von einer Differentialgleichung?
- ✓ Wann spricht man von der Lösung einer DGL?
- ✓ Was sind Integrationskonstanten?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der als Grundfläche die Schnittebene der beiden Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ besitzt.

   Die benötigte Raumfunktion lautet:

   $z(x; y) = x \cdot y^2 + x$



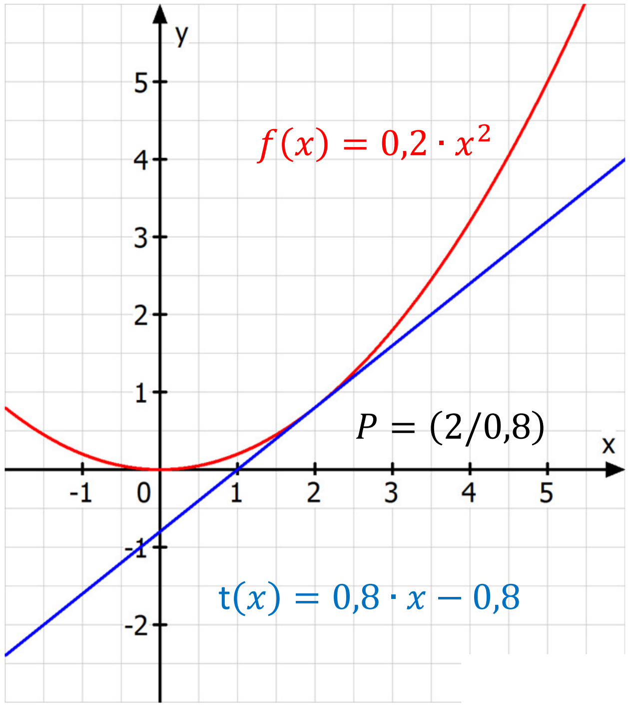
PARTIELLE DIFFERENTIATION I

Ist eine Funktion nur von **einer Variablen** abhängig, so erhält man die Steigung sprich die 1. Ableitung über den Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = m = tan(\alpha)$$

Im zweidimensionalen Raum entsteht somit an jedem Punkt des Graphen eine Tangente mit der Steigung *m* und dem Steigungswinkel α.



$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}2 \cdot (2+\Delta x)^2 - 0{,}8}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}2 \cdot \left(4 + 4 \cdot \Delta x + \Delta x^2\right)^2 - 0{,}8}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}8 + 0{,}8 \cdot \Delta x + 0{,}2 \cdot \Delta x^2 - 0{,}8}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (0{,}8 + 0{,}2 \cdot \Delta x)}{\Delta x} = 0{,}8$$

PARTIELLE DIFFERENTIATION II

Ist eine Funktion von **mehreren (hier 2) Variablen** abhängig $z = f(x; y)$, dann existieren je Variable eine erste Ableitung, die **partielle Ableitung 1. Ordnung**.

nach x: $$f_x{}'(x; y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

nach y: $$f_y{}'(x; y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

Anstelle des Grenzwerts können alle gängigen Ableitungsregeln verwendet werde, wobei der Buchstabe, nach dem differenziert wird, die Variable ist und alles andere als Parameter zu verstehen ist.

$$z = f(x; y) = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$$

Ableitung nach x: $$f_x'(x; y) = \frac{dz}{dx} = -12y^2 \cdot x^2 + 2y^4 - 3$$

Ableitung nach x: $$f_y'(x; y) = \frac{dz}{dy} = -8x^3 \cdot y + 12x \cdot y^3 + 2$$

PARTIELLE DIFFERENTIATION III

Um weitere partielle Ableitungen höherer Ordnung zu berechnen nutzt man den gleichen Differenzenquotienten wie bei den Ableitungen 1. Ordnung.

Für die Anzahl der entstehenden Funktionen gilt folgende Übersicht:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & f(x;y) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & & \\
 & f_x{}'(x;y) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & f_y{}'(x;y) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \text{1. Ordnung} \\
f_{xx}{}''(x;y) & & f_{xy}{}''(x;y) & & f_{yx}{}''(x;y) & & f_{yy}{}''(x;y) & \text{2. Ordnung}
\end{tikzcd}
$$

Es entstehen somit für eine partielle Ableitung der n-ten Ordnung maximal 2^n verschiedene Funktionen.

PARTIELLE DIFFERENTIATION IV

Wie auch bei den „normalen" Ableitungen im zweidimensionalen Raum gelten in der partiellen Differentialrechnung die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel.

In allen drei Regeln, muss eine Hilfsvariable (eine Art Substitution) genutzt werden.

<u>Beispiel Produktregel</u>: $z = f(x;y) = \underbrace{xy^2}_{u} \cdot \underbrace{\big(sin(x) + cos(y)\big)}_{v}$

Ableitung nach x: $f_x'(x;y) = y^2 \cdot \big(sin(x) + cos(y)\big) + xy^2 \cdot cos(x)$

Ableitung nach y: $f_y'(x;y) = 2x \cdot y \cdot \big(sin(x) + cos(y)\big) - xy^2 \cdot sin(x)$

PARTIELLE DIFFERENTIATION V

<u>Beispiel Kettenregel</u>: $z = f(x; y) = ln(3x + y^2)$

Substitution mit $u = 3x + y^2$

Funktion $f(x; y) = ln(3x + y^2) = ln\left(u_{x;y}\right)$

Ableitung nach x: $f_x'(x; y) = \frac{1}{u_{x;y}} \cdot u'_x$

Resubstitution $f_x'(x; y) = \frac{1}{3x+y^2} \cdot (3x)' = \frac{3}{3x+y^2}$

Ableitung nach y: $f_y'(x; y) = \frac{1}{u_{x;y}} \cdot u'_y$

Resubstitution $f_y'(x; y) = \frac{1}{3x+y^2} \cdot (y^2)' = \frac{2y}{3x+y^2}$

AUFGABEN

1) Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung

a) $z = f(x;y) = (2x - 3y^2)^5$

b) $z = f(x;y) = \sqrt{2xy - y^2}$

c) $z = f(x;y) = ln(2x + e^{3y})$

d) $z = f(x;y) = arctan\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)$

2) Bilden Sie alle partiellen Ableitungen der 1. und 2. Ordnung von $z = f(x;y) = 5 \cdot e^{x^2 - y^2}$

LÖSUNG

1) Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung

a) $f_x'(x) = 10 \cdot (2x - 3y^2)^4$; $f_y'(x) = -30y \cdot (2x - 3y^2)^4$

b) $f_x'(x) = \frac{y}{\sqrt{2xy-y^2}}$; $f_y'(x) = \frac{x-y}{\sqrt{2xy-y^2}}$

c) $f_x'(x) = \frac{2}{2x+e^{3y}}$; $f_y'(x) = \frac{3 \cdot e^{3y}}{2x+e^{3y}}$

d) $f_x'(x) = \frac{y^2-1}{(x+y)^2+(xy+1)^2}$; $f_y'(x) = \frac{x^2-1}{(x+y)^2+(xy+1)^2}$

2) $f_x'(x) = 10x \cdot e^{x^2-y^2}$; $f_y'(x) = -10y \cdot e^{x^2-y^2}$

$f_{xx}''(x) = (10 + 20x^2) \cdot e^{x^2-y^2}$; $f_{xy}''(x) = -20xy \cdot e^{x^2-y^2}$

$f_{yy}''(x) = (-10 + 20y^2) \cdot e^{x^2-y^2}$; $f_{yx}''(x) = -20xy \cdot e^{x^2-y^2}$

DIFFERENTIALGLEICHUNG I

Eine Gleichung, in der bis zu $\boldsymbol{n}$ Ableitungen einer unbekannten Funktion $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ vorhanden sind, heißt **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) n-ter Ordnung**.

Als Bestandteil der DGL können neben den Ableitungen auch die Funktion y selbst und die unabhängige Variable x enthalten sein.

- Implizite Form: $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$

  $y' - y \cdot y'' = 0$

- Explizite Form: $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$

  $y'' = 2x - y'$

Gerade in den MINT Bereichen spielen die DGL eine wichtige Rolle.

DIFFERENTIALGLEICHUNG II

Beispiel:

Es gelten folgende Gesetze der beschleunigten Bewegung.

Weg - Zeit: $s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

$$s(t) = \int v(t)dt = V(t) + C_2$$

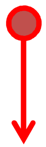
Geschwindigkeit: $s'(t) = v(t) = a \cdot t$

$$v(t) = \int a(t)dt = A(t) + C_1$$

Beschleunigung: $s''(t) = v'(t) = a(t)$

DIFFERENTIALGLEICHUNG III

Im luftleeren Raum fällt ein Körper mit der Beschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$.



$$s''(t) = -g$$

(der Körper fällt nach unten, daher negativ)

Durch Bildung der Stammfunktionen erhält man die Funktionen $v(t)$ und $s(t)$

$$v(t) = \int a(t)dt = -\int g\,dt = -g \cdot t + C_1$$

Integrationskonstante

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (-g \cdot t + C_1)dt = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2$$

DIFFERENTIALGLEICHUNG IV

Durch die unabhängigen Integrationskonstanten (Parameter) existieren eine Vielzahl von Lösungen. Durch die Definition von Rand- bzw. Startwerten wird somit aus der allgemeinen Lösung eine spezielle.

Betrachten wir nun die Zustände zum Zeitpunkt $t = 0$ so erhalten wir

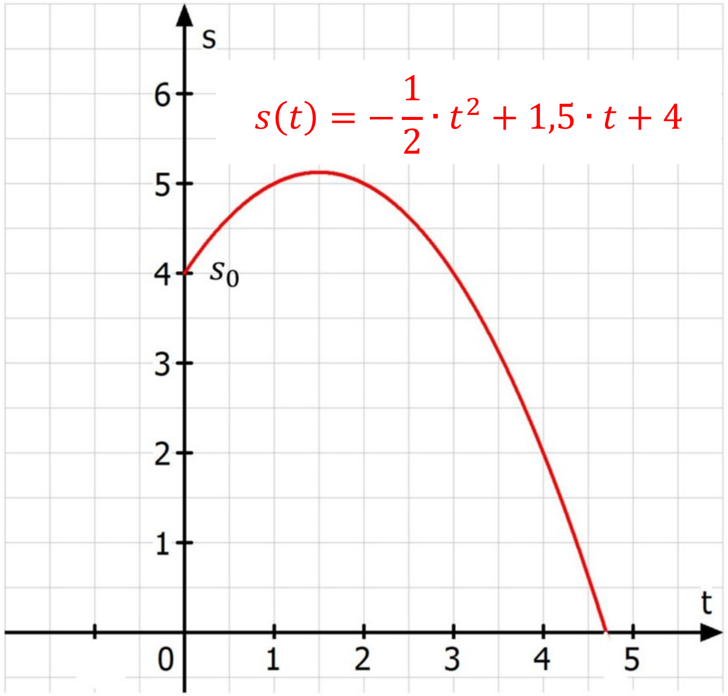
- Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = v(0) = C_1$$

- Starthöhe

$$s_0 = s(0) = C_2$$

Allgemein Lösung: $s(t) = -\frac{1}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$



LÖSUNG EINER DGL 1. ORDNUNG

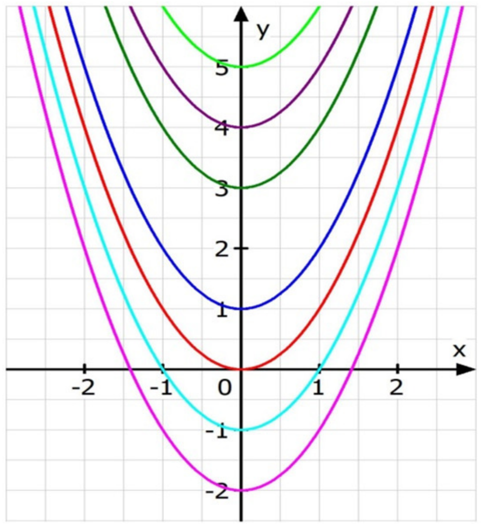
Eine Funktion $y = y(x)$ heißt Lösung, wenn sie mit ihren Ableitungen die gegebene Differentialgleichung erfüllt.

<u>Anfangswertproblem</u>:
Die allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung besteht zusätzlich aus n unabhängigen Parametern (Integrationskonstante), die mittels der Anfangswerte (Randwerte) bestimmt werden können.

<u>Allgemeine Lösung einer DGL 1.Ordnung</u>:

$$y' = 2x$$

$$y = \int y'\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C\,; C \in \mathbb{R}$$



LÖSUNG EINER DGL 2. ORDNUNG

Allgemeine Lösung einer DGL 2.Ordnung:

Die harmonische Schwingung eines elastischen Federpendels lässt sich wie folgt durch eine Sinusschwingung beschreiben.

$$x(t) = A \cdot sin(\omega_0 \cdot t + \phi)$$

A:	Amplitude
ω_0:	Winkelgeschwindigkeit
ϕ:	Anfangsphase

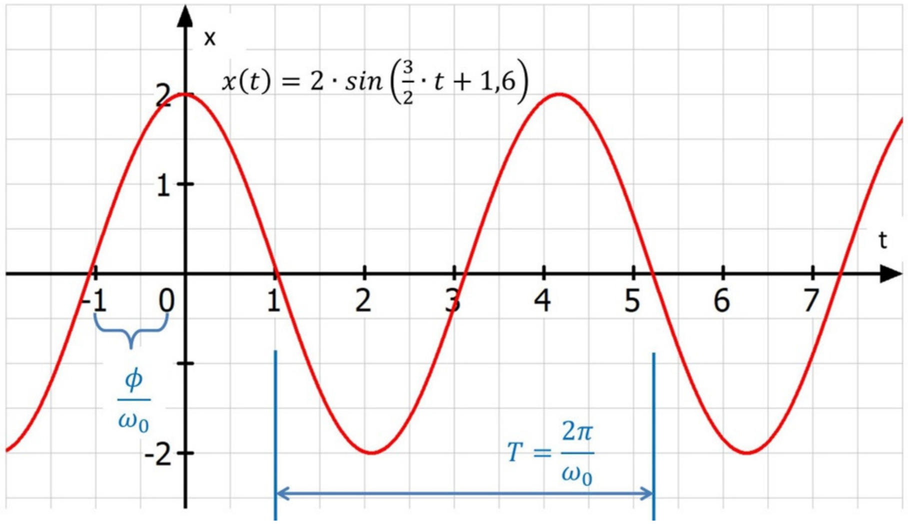
Schwingungsgleichung:

$$x(t) = A \cdot sin(\omega_0 \cdot t + \phi)$$

$$x'(t) = \omega_0 \cdot A \cdot cos(\omega_0 \cdot t + \phi)$$

$$x''(t) = -{\omega_0}^2 \cdot A \cdot sin(\omega_0 \cdot t + \phi)$$
$$x''(t) = -{\omega_0}^2 \cdot x(t)$$

$$x''(t) + {\omega_0}^2 \cdot x(t) = 0$$



RANDWERTPROBLEM EINER DGL

DGL 1. Ordnung:
Es wird eine spezielle Lösung gesucht, die durch den Punkt $(x_0; y(x_0))$ geht.

Beispiel: $y' = 2x, \quad y(0) = 1$

$$y = \int y'\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\boldsymbol{y = x^2 + 1}$$

DGL 2. Ordnung:
Es wird eine spezielle Lösung gesucht, die durch den Punkt $(x_0; y(x_0))$ geht und dort die gegebene Steigung $y'(x_0) = m$.

Beispiel: $x''(t) + {\omega_0}^2 \cdot x(t) = 0, x(0) = x_0 > 0, x'(0) = 0$

$$x(t) = x_0 \cdot sin\left(\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0 \cdot cos(\omega_0 \cdot t)$$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie zu den gegebenen Differentialgleichungen der 1. Ordnung deren Lösung unter Berücksichtigung der Randwerte.

   a) $y' = 6x^2 + 2,\ y(1) = 5$

   b) $y' = \frac{3}{x^2} + 4,\ y(1) = 2$

2) Geben Sie zu der gegebenen Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung den dazugehörigen Funktionsterm an.

   a) $x(t) = \frac{1}{4}(e^{2t+1} + \gamma \cdot t^2)$

   b) $y(x) = 2 \cdot cos\left(\frac{1}{2}x + \delta\right), \delta = \frac{3}{2}\pi$