MATHEMATIK

12.06.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Welche Integrale können via Grenzwerte entstehen?
- ✓ Was passiert, wenn $f(x)$ auf deren Ableitung $f'(x)$ trifft?
- ✓ Was ist eine reduzierende bzw. alternierende Funktion?
- ✓ Wie funktioniert die partielle Integration?
- ✓ Warum stammt die Formel aus der Produktregel?
- ✓ Woher weiß man wie viele Schritte man benötigt?
- ✓ Wann sollte man in der Mathematik substituieren?
- ✓ Was muss bei der Integralsubstitution alles ersetzt werden?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben und Anwendungen Integralrechnung.
- ✓ Wie entsteht eine dreidimensionale Funktion?
- ✓ Wovon hängt das Volumen des Körpers ab?
- ✓ Welche Varianten der Grundfläche gibt es?
- ✓ Wie integriert man mit festen Grenzen?
- ✓ Wie bekommt man die Basisfunktion in das Integral?
- ✓ Wie berechnet man ein Doppelintegral?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Berechnen Sie Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse (Nullstellen).

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

2) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die zugehörige Stammfunktion.

a) $h(x) = 7x - 2 \cdot e^{3x-4}$

b) $k(x) = 4 \cdot (5-3x)^3$

3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} \wedge g(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{5x-6} \wedge g(x) = x$

4) Bestimmen Sie die Stammfunktionen der gegebenen Funktionen:

a) $h(x) = 2 \cdot x^2 \cdot e^{3x-4}$

b) $k(x) = \frac{4 \cdot \cos(5-3x)}{e^{2x}}$

5) Bestimmen Sie folgende Integrale

a) $\int \left(x \cdot \sqrt{1-x^2} \right) dx$

b) $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx$

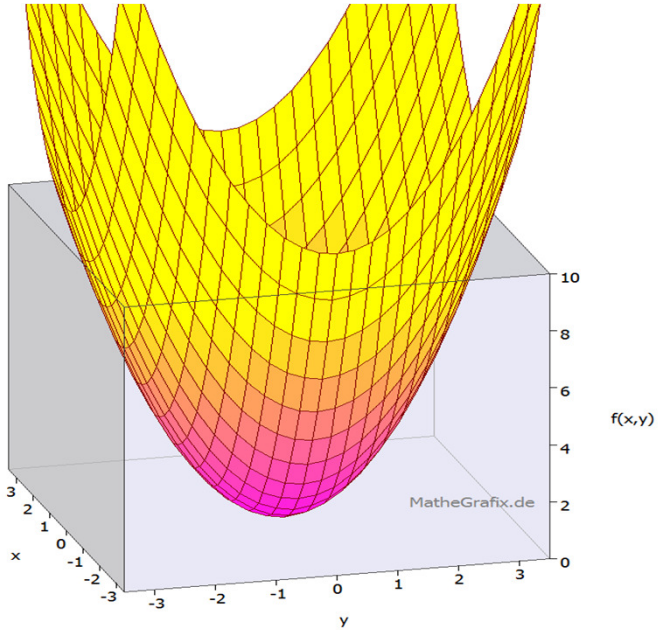
DOPPELINTEGRALE I

Die bisher betrachtete Integralrechnung basiert auf nur zwei veränderliche Variable, d.h. wir betrachten eine Funktion im $\mathbb{R}^2$ also zweidimensional.

Für den dreidimensionalen Raum wird eine Variable z in Abhängigkeit von zwei weiteren $(x; y)$ gesetzt.

Es entsteht folgende Definition: $z = f(x; y)$.

Beispiel: $\mathrm{z} = f(x; y) = x^2 + y^2$



DOPPELINTEGRALE II

Bei der Berechnung bestimmter Integrale in definierten konstanten Grenzen ergibt sich die folgende Aufgabenstellung:

$$\int_{x=\alpha}^{\beta} \int_{y=\delta}^{\varepsilon} f(x;y)\, dy\, dx = \int_{y=\delta}^{\varepsilon} \int_{x=\alpha}^{\beta} f(x;y)\, dx\, dy$$

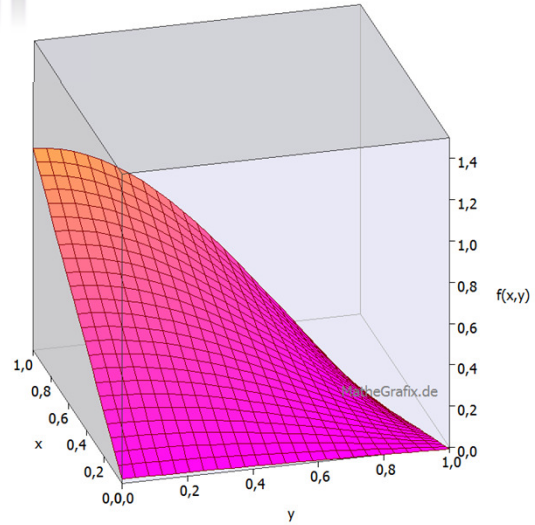
Nun wird im ersten Schritt das innere Integral bestimmt und die Grenzen eingesetzt, wodurch nur noch eine Funktion in Abhängigkeit der äußeren Variablen entsteht:

$$\int_{x=\alpha}^{\beta} \int_{y=\delta}^{\varepsilon} f(x;y)\, dy\, dx = \int_{x=\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

Nach erneuter Integration und Einsetzen der Grenzen erhält man das gesuchte Volumen.

DOPPELINTEGRALE III

Beispiel: $$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\pi/4} x \cdot cos(2y)\, dy\, dx$$



<u>Innere Integration nach y:</u>

$$\int_{y=0}^{\pi/4} x \cdot cos(2y)\, dy = x \cdot \int_{y=0}^{\pi/4} cos(2y)\, dy = x \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot sin(2y)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \cdot x$$

<u>Äußere Integration nach x:</u>

$$\int_{x=0}^{1} \frac{1}{2} \cdot x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{1} x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

AUFGABEN

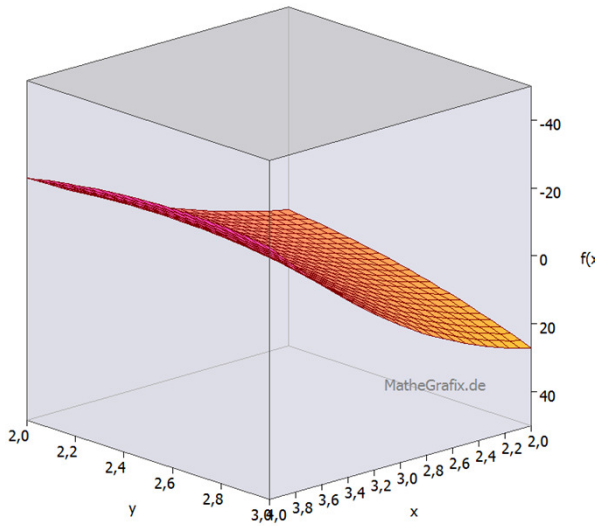
1) Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int_{x=0}^{1,5} \int_{y=0,5}^{1} x \cdot e^{y+x^2} \, dy \, dx$$

2) Berechnen Sie den Wert des folgenden Doppelintegrals in den gegebenen Grenzen:

$2 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq 3$

$z(x; y) = x \cdot y^3 - x^2 \cdot y^2 + 250$



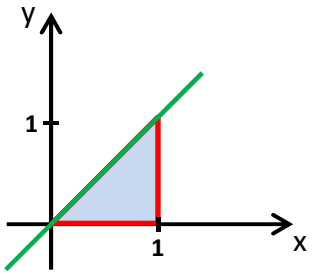
DOPPELINTEGRALE IV

Die zuvor berechneten Volumen wurden stets durch eine rechteckige Grundfläche beschrieben, die in der x-y-Ebene liegt.

Handelt es sich um eine Grundfläche, die von einer Funktion abhängt, so muss diese bei den Grenzen berücksichtigt werden. Je nach der Definition des äußeren / inneren Integrals, muss die Grenze über die Funktion bzw. deren Umkehrfunktion beschrieben werden.

$$\int_{x=\alpha}^{\beta} \int_{y=\delta}^{f(x)} f(;y)\, dy\, dx = \int_{y=\delta}^{\varepsilon} \int_{f^{-1}(x)}^{\beta} f(x;y)\, dx\, dy$$

Soll nun in über einer Dreiecksgrundfläche $f(x) = x$ die Funktion $z = f(x;y) = x \cdot y^2$ integriert werden, so entsteht das folgende Integral:



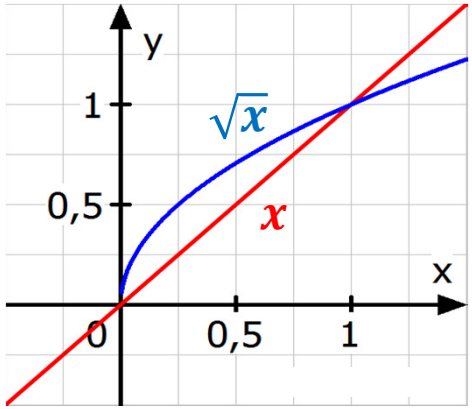
$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} x \cdot y^2\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} \left[\left(\frac{1}{3} \cdot x \cdot x^3 - \frac{1}{3} \cdot x \cdot 0^3\right)\right] dx = \int_{x=0}^{1} \left(\frac{1}{3} \cdot x^4\right) = \frac{1}{15} FE$$

DOPPELINTEGRALE V

Beispiel einer variablen Grundfläche:

Hier soll über der eingeschlossenen Fläche von den Funktionen $\sqrt{x}$ und x in der x-y-Ebene das Volumen zu $z = f(x; y) = x \cdot y$ berechnet werden.

Wie man erkennt liegt die Wurzelfunktion oberhalb von der linearen Funktion:



Es ergibt sich somit:

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{\sqrt{x}} x \cdot y \, dy \, dx = \int_{x=0}^{1} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x}^2 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot x^2 \right) \right] dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{1} (x^2 - x^3) dx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{1} (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 \right) = \frac{1}{24} FE$$

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers,
der als Grundfläche die Schnittebene
der beiden Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ besitzt.

Die benötigte Raumfunktion lautet:

$z(x; y) = x \cdot y^2 + x$