MATHEMATIK

29.05.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Welche beide Arten eines Integrals kennen Sie?
- ✓ Was sind die wichtigsten Regeln der Integration?
- ✓ Wie bestimmen Sie die Flächen einer Funktion bei gegebenen Grenzen?
- ✓ Was verstehen Sie unter der Aufleitung einer Potenzfunktion?
- ✓ Wie berechnet man die Fläche zwischen Funktion und x-Achse?
- ✓ Wie bestimmen Sie die Stammfunktion einer höheren Funktion?
- ✓ Was ist eine Differenzfunktion?
- ✓ Wie können Sie die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben und Anwendungen der Integralrechnung.
- ✓ Wann sprechen wir von einem (un)endlichen Integral?
- ✓ Was ist eine reduzierende/ alternierende Funktion
- ✓ Wie funktioniert die partielle Integration?
- ✓ Wie funktioniert die Substitution der Integration?
- ✓ Wann kann man sich die Resubstitution sparen?
- ✓ Allgemeingültige Methodik zur Integralberechnung
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Lösen Sie die folgenden Integralgleichungen.

a) $\int_1^z \left(3x^2 - 3\right) dx = 4$

2) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die zugehörige Stammfunktion.

a) $h(x) = 3 - 2 \cdot \sin(5 - 4x)$

b) $k(x) = \sqrt[3]{12 - 0{,}5x}$

3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 5 \wedge g(x) = 2x + 1$

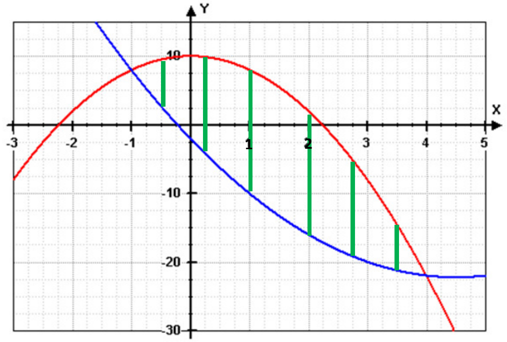
b) $f(x) = x \cdot \left(x^2 - x\right) \wedge g(x) = x^2 + x - 2$

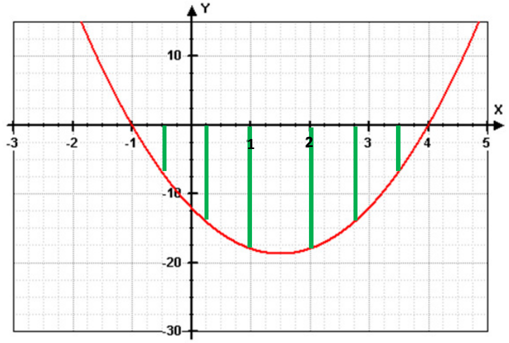
INTEGRALRECHNUNG VI

Um die Fläche **zwischen zwei Funktionen** zu berechnen, bestimmt man das Integral der **Differenzfunktion** innerhalb der existierenden **Nullstellen**.

1. Nullstellenberechnung: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = \alpha \vee x_2 = \beta$

2. Integration der Differenzfunktion: $\int_{\beta}^{\alpha} \left(f(x) - g(x)\right) dx$





<u>Beispiel</u>: $f(x) = 10 - 2x^2 \wedge g(x) = x^2 - 9x - 2$

1. Nullstellen: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10 - 2x^2 = x^2 - 9x - 2$
$= 3x^2 - 9x - 12 = 3 \cdot (x-4) \cdot (x+1) = 0$

2. Integration: $\int_{-1}^{4} \left(3x^2 - 9x - 12\right) dx = \left| x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x \right|_{-1}^{4}$
$= \left|F(4) - F(-1)\right| = \left|-56 - 6{,}5\right| = 62{,}5$

INTERGALE VII

Abhängig von den zugehörigen **Integrandfunktionen** wird im Bereich der Flächeninhaltsberechnung zwischen **unendlichen** und **endlichen** Integralen unterschieden.
Um die entsprechende Eigenschaft **klassifizieren** zu können, wird zuerst die Stammfunktion an der **gegebenen Stelle** berechnet und anschließend mittels **Grenzwertbetrachtung** gegen Unendlich oder Konstant der Wert des Integrals bestimmt.

- ✓ unendliche Integrale:

  Dem Integral kann **kein exakter Wert** zugewiesen werden bzw. strebt der gesuchte Flächeninhalt gegen unendlich.
  Dies geschieht z.B. an den senkrechten Asymtoten (Definitionslücken) einer Funktion.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\big(f(x)\big) = \infty$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \left| -\frac{1}{2\cdot(x-1)^2}\right|_0^1 = \left|\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{2\cdot(x-1)^2}+\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\left[-\infty+\frac{1}{2}\right]\right| = |-\infty| = \infty$$

  Man erkennt, dass durch die Grenzwertbetrachtung unendlich als Resultat herauskommt, was keinem exakten Flächeninhalt entsprechen kann.

INTERGALE VIII

✓ Endliche Integrale:

Es handelt sich um einen **festen Wert**, der dem Integral zugewiesen werden kann.
Dieser liegt z.B. dann vor, wenn sich die Fläche innerhalb **zweier Nullstellen** befindet oder auch bei der Bestimmung des Inhalts **zwischen zwei** gegebenen Funktionen.

Wird allerdings der Flächeninhalt bis ins **Unendliche** gesucht, so muss der Grenzwert der **Integrandfunktion** (im Undendlichen) **Null** sein.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(f(x) \right) = 0$$

$$\int_2^\infty f(x)dx = \left| -\frac{1}{x} \right|_2^\infty = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) = \left[0^- + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

Auch hier wird mittels **Grenzwertbetrachtung** der Stammfunktion die Fläche gesucht.
Da die Stammfunktion allerdings im Unendlichen Null ist, fällt sie ganz weg und man erhält einen **konstanten Wert** für die gesuchte Fläche.

FUNKTIONSARTEN

Für die Berechnung komplizierter Stammfunktionen ist es wichtig, die Arten der möglichen Integrandfunktion näher zu beschreiben.
Die Unterscheidung bezieht sich im Wesentlichen auf die Art der Ableitungen:

- ✓ Reduzierende Funktion:

  Eine solche Funktion liegt dann vor, wenn sich beim Ableiten eines Ausdrucks der Exponent reduziert und letztlich zu einer Konstanten wird (Polynom vom Grade n).

  $$f(x) = 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 \Rightarrow f''(x) = 12x \Rightarrow f'''(x) = 12$$

  Nach n Ableitungen verschwindet die Funktion komplett (wird Null).

- ✓ Alternierende Funktion:

  Eine solche Funktion liegt dann vor, wenn sich beim Ableiten eines Ausdrucks die entstehende Funktionsklasse nicht verändert (Trigonometrie, Exponential).

  $$f(x) = e^{2x+1} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f''(x) = 4 \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f'''(x) = 8 \cdot e^{2x+1} \Rightarrow \ldots$$

  Nach n Ableitungen ist die Funktion immer noch die gleiche (alternierend).

AUFGABEN

1) Geben Sie den Wert des folgenden Integrals an und klassifizieren Sie diesen.

a) $\int_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{x^5}\right)dx$ b) $\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{x}\right)dx$

2) Bestimmen die Grenze des Integrals, so dass die gegebene Fläche erreicht wird.

$$\int_{\alpha}^{\infty}\left(\frac{1}{(2x-2)^2}\right)dx = \frac{1}{16}$$

3) Bestimmen Sie die ersten 5 Ableitungen der Funktion und klassifizieren Sie diese.

a) $f(x) = 0{,}5 \cdot x^4 - 3x^2$

b) $g(x) = 2\sin(2x-4)$

c) $h(x) = 3x^2 - \frac{2e^2}{e^x}$

INTEGRATIONSVERFAHREN

Trifft hinter dem Integralzeichen eine **Funktion** auf deren **Ableitung**, kann dies entweder in Form eines **Produktes** oder als **Quotient** geschehen.
Aufgrund der Kettenregeldefinition ergeben sich dadurch folgende Zusammenhänge:

<u>Produkt:</u>

$$\boxed{\int \left(f(x)\cdot f'(x)\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left[f(x)\right]^2 + C}$$

$$\left[\frac{1}{2}\cdot\left[f(x)\right]^2 + C\right]' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left[f(x)\right]^{2-1}\cdot f'(x) + 0 = f(x)\cdot f'(x)$$ *Beweis*

<u>Quotient:</u>

$$\boxed{\int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx = \ln\left(f(x)\right) + C}$$

$$\left[\ln\left(f(x)\right) + C\right]' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ *Beweis*

PARTIELLE INTEGRATION I

Besteht die **Integrandfunktion** aus einem **Produkt** von zwei unterschiedlichen Funktionen, so muss **partiell integriert** werden.
Das anzuwendende Verfahren ergibt sich aus der **bekannten Produktregel** der Ableitungen:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x) = [f(x)\cdot g(x)]' - g'(x)\cdot f(x)$$

Durch die Bildung der „Aufleitung“ auf beiden Seiten ergibt sich automatisch die Produktregel der Integration sprich die **partielle Integration**:

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g'(x)\cdot f(x)}$$

Fall 1:
Trifft eine **reduzierende** auf eine **alternierende** Funktion, sollte g(x) als reduzierend und f‘(x) als alternierende Funktion gewählt werden, da nach n Integrationen die reduzierende Funktion verschwindet.

Fall 2:
Sind die beiden Faktoren des Produkt alternierende Funktionen, so muss max. zweimal partiell integriert werden, da nach dem 2. Schritt automatisch das Ausgangsintegral entsteht.

PARTIELLE INTEGRATION II

<u>Beispiel zu Fall 1:</u> $\int \left(x^2 \cdot e^{2x}\right) dx = F_1(x) + C$ *g(x)=reduzierend; f(x)=alternierend*

1. Schritt:

$$\left.\begin{array}{lcl} f'(x) = e^{2x} & \Rightarrow & f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \\ g(x) = x^2 & \Rightarrow & g'(x) = 2 \cdot x \end{array}\right\} F_1(x) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x^2} - \boxed{\int \left(\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot 2 \cdot x\right) dx}$$

$$\int \left(e^{2x} \cdot x\right) dx = F_2(x) + C$$

2. Schritt:

$$\left.\begin{array}{lcl} f'(x) = e^{2x} & \Rightarrow & f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \\ g(x) = x & \Rightarrow & g'(x) = 1 \end{array}\right\} F_2(x) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x} - \boxed{\int \left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x}\right) dx}$$

$$\Rightarrow \int \left(x^2 \cdot e^{2x}\right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x^2 - \left(\frac{1}{2} e^{2x} \cdot x - \frac{1}{4} e^{2x}\right) + C = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$$

PARTIELLE INTEGRATION III

<u>Beispiel zu Fall 2:</u> $\int \left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = F_1(x)+C$ *g(x)=alternierend; f(x)=alternierend*

1. Schritt:

$$\left.\begin{cases} f'(x)=e^{2x} & \Rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x} \\ g(x)=\sin(x) & \Rightarrow \quad g'(x)=\cos(x) \end{cases}\right\} F_1(x)=\boxed{\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin(x)}-\boxed{\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x)\right)dx}$$

$$\int \left(e^{2x}\cdot\cos(x)\right)dx = F_2(x)+C$$

2. Schritt:

$$\left.\begin{cases} f'(x)=e^{2x} & \Rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x} \\ g(x)=\cos(x) & \Rightarrow \quad g'(x)=-\sin(x) \end{cases}\right\} F_2(x)=\boxed{\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x)}-\boxed{\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot(-\sin(x))\right)dx}$$

$$\Rightarrow \int \left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x)+\frac{1}{2}\int\left(e^{2x}\cdot\sin(x)\right)dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \int \underline{\left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right)-\frac{1}{4}\int\underline{\left(e^{2x}\cdot\sin(x)\right)}dx$$

$$\frac{5}{4}\int \left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right) \Leftrightarrow \int \left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{2}{5}e^{2x}\cdot\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right)$$

INTERGAL SUBSTITUTION I

Wie man u.a. auch bei den **Biquadratischen Gleichungen** das Verfahren der **(Re)Substitution** nutzt, um den Ausdruck zu vereinfachen und die Lösung zu bestimmen, so kann diese Methode auch bei der **Bestimmung der Stammfunktion** genutzt werden.

Bei der Integralrechnung ist neben der **Variablen** selbst auch $\boldsymbol{dx}$ zu berücksichtigen.

<u>Integration via Substitution:</u>

1. **Substitutionsgleichung**: $u = g(x);\; g'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$
2. **Integralsubstitution**: $\int f(x)\,dx = \int f^*(u)\,du$
3. **Stammfunktion**: $\int f^*(u)\,du = F^*(u) + C$
4. **Resubstitution**: $F^*(u) + C = F\big(g(x)\big) + C$

Bei der Wahl der Substitutionsgleichung sollte stets darauf geachtet werden, dass deren Ableitung gekürzt werden kann.

INTERGAL SUBSTITUTION II

Beispiel: $\int x \cdot cos(x^2)dx$

Im ersten Moment mag man an das Verfahren der partiellen Integration denken, allerdings stört bei der Stammfunktionsfindung von $cos(x^2)$ das Argument.

Integration via Substitution:

1. **Substitutionsgleichung**: $u = x^2;\ g'(x) = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

2. **Integralsubstitution**: $\int x \cdot cos(x^2)dx = \int x \cdot cos(u)\frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \int cos(u)du$

3. **Stammfunktion**: $\frac{1}{2} \cdot \int cos(u)du = \frac{1}{2} \cdot sin(u) + C$

4. **Resubstitution**: $\frac{1}{2} \cdot sin(u) + C = \frac{1}{2} \cdot sin(x^2) + C$

Bei der Wahl der Substitutionsgleichung sollte stets darauf geachtet werden, dass deren Ableitung gekürzt werden kann.

INTERGAL SUBSTITUTION III

Bisher haben wir nur unbestimmte Integrale sprich die Bestimmung einer Stammfunktion betrachtet. Handelt es sich um ein bestimmtes Integral, so kann man Schritt 4 durch die Anpassung der Grenzen ersetzen und direkt den Wert des Integrals berechnen.

<u>Integration via Substitution:</u>

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx$$

1. **Substitutionsgleichung**:

$$u = 2 + x^2;\ g'(x) = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

2. **Integralsubstitution**:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

3. **Stammfunktion (Grenzen)**:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{2} \cdot \int_{2+0^2}^{2+1^2} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0{,}32$$

METHODIK DER INTEGRATION

Aufgrund der Vielzahl der Möglichkeiten eine Stammfunktion zu entwickeln, sollte folgende Vorgehensmethodik angewandt werden:

1. Einfache Aufleitung: $\boxed{f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}}$

---

2. Produkt $\left(f(x) \cdot f'(x)\right)$: $\boxed{\int \left(f(x) \cdot f'(x)\right) dx = \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 + C}$

---

3. Quotient $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$: $\boxed{\int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx = \ln\left(f(x)\right) + C}$

---

4. Alternierend $\begin{cases} \nearrow \text{reduzierend} \\ \searrow \text{alternierend} \end{cases}$: $\boxed{\int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int g'(x) \cdot f(x)}$

---

5. Sollte kein Verfahren direkt anwendbar sein, muss schlau substituiert werden.

AUFGABEN

1) Berechnen Sie zu den gegebenen Funktionen deren Stammfunktion.

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ b) $g(x) = -\tan(x)$ c) $h(x) = \dfrac{8x^3 - 16x}{(2x^2 - 4)^2}$

2) Bestimmen die folgenden beiden unbestimmten Integrale.

a) $\int \left(\dfrac{1}{2} x^2 \cdot \cos(2x) \right) dx$ b) $\int \left(\cos(2x) \cdot e^{3-2x} \right) dx$

3) Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale

a) $\int \left(\dfrac{\ln^2(x)}{x} \right) dx$ b) $\int_0^2 \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^3}} \right) dx$