# MATHEMATIK

22.05.2017

# WIEDERHOLUNG

#### Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Nennen Sie die 2 wichtigsten Eigenschaften von Mengen!
- ✓ Wie können Sie ein Intervall definieren?
- ✓ Wie funktioniert die Modulo-Operation?
- ✓ Wofür braucht man das "de Morgan Gesetz"?
- ✓ Was versteht man unter einem neutralen Objekt?
- ✓ Was wird durch die Inklusion beschrieben?
- ✓ Was versteht man unter der Antisymmetrie?
- ✓ Was sind komplexe Zahlen?
- ✓ Was versteht man unter dem Betrag / Argument?
- ✓ Was hat die Modulo-Operation mit den komplexen Zahlen zu tun?
- ✓ Welche Darstellungsformen hat eine komplexe Zahl?
- ✓ Auf welche Arten werden komplexe Zahlen dividiert?
- ✓ Wie potenziert bzw. radiziert man eine komplexe Zahl?

## ZIELSETZUNG

#### Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben und Anwendungen der komplexen Zahlen.
- ✓ Wie ist ein allgemeines, (un)bestimmtes Integral aufgebaut?
- ✓ Worauf ist bei der Integration zu achten?
- ✓ Was macht man bzgl. der Stammfunktion bei höheren Funktionen?
- ✓ Wie berechnet man den Flächeninhalt zwischen 2 Funktionen?
- ✓ Wann sprechen wir von einem (un)endlichen Integral?
- ✓ Was ist eine reduzierende/ alternierende Funktion
- ✓ Wie funktioniert die partielle Integration?
- ✓ Allgemeingültige Methodik zur Integralberechnung
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

- 1) Beschreiben Sie alle ganzen Zahlen zwischen -5 und 10, die durch drei aber nicht durch 4 teilbar sind.
- 2) Definieren Sie die natürlichen Zahlen größer gleich vier und kleiner 50, die durch 4 und durch 7 teilbar sind.
- 3) Gegeben sei die Menge M aller Studierenden an der Hochschule Fulda in Form der Matrikelnummer. Gesucht ist die Menge der Studierenden, wo die Quersumme der Matrikelnummer größer 15 ist.

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels kartesischer Form an. Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

1) 
$$(1-2i)^3 \cdot [(3-i)\cdot (2i+6)\cdot i]$$

$$2) \quad \frac{3+2i}{4-i} + \frac{-12-3i}{2i-3}$$

3) 
$$(2+3i)^2 \cdot 2(1-2i)^2 \cdot i^{13}$$

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung als z=a+bi an.

1) 
$$(2i-5) \cdot [(3i+4)-2 \cdot (i-4)]$$

2) 
$$4 \cdot (i-3) \cdot (3+1) - (i-2) \cdot (5+i)$$

3) 
$$4i^8 \cdot (4i - 2i^{11}) \cdot [(i^3 + 2i) \cdot (4i + 1)]$$

4) 
$$15i^{11} - 3i \cdot (2i^7 + 2i^8) + 6i \cdot (2i - 5i^{15} + 3i^6)$$

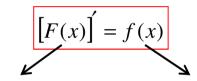
5) 
$$\frac{3-2i}{i-1} - \frac{3i+4}{1-2i} - \frac{3i+19}{10}$$

6) 
$$(-5i^{32} + 4i^{17})^3 - (4i^{19} + i^{46})^4$$

### **INTEGRALRECHNUNG I**

Mittels der Integralrechnung wird z.B. eine **Fläche** zwischen einer **Funktion** und der **X-Achse** in gegebenen Grenzen bestimmt.

Eine Funktion, die durch Einsetzen der Grenzen den gesuchten Inhalt liefert nennt man **Stammfunktion**, für die folgender Zusammenhang gilt:



Stammfunktion Integrandfunktion

Die Ableitung der Stammfunktion ist die Integrandfunktion.

✓ <u>Unbestimmte Integral</u>:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Es handelt sich um ein Integral, in dem die Grenzen nicht gegeben sind.

Es ist darauf zu achten, dass bei diesem Intergaltyp die Stammfunktion durch eine **Konstante** ergänzt werden muss.

✓ Bestimmtes Integral:

$$\int_{b}^{a} f(x)dx = |F(x)|_{b}^{a} = F(a) - F(b)$$

Es handelt sich um ein Integral, in dem die Grenzen gegeben sind.

Die gesuchte Fläche berechnet sich durch die **Differenz** der Stammfunktion an der **oberen** und **unteren** Grenze.

### **INTEGRALRECHNUNG II**

Die Stammfunktion einer Funktion wird quais mittels **Aufleitung** gebildet. Im Fall einer einfachen **Potenzfunktion** ergibt sich:

$$f(x) = a \cdot x^n \iff F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

Beweis: 
$$[F(x)]' = f(x)$$

$$\left[\frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}\right]' = \frac{a}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{(n+1)-1} = a \cdot x^n = f(x)$$

#### Regeln/ Eigenschaften der Integration:

Da es **keine negativen Flächen** gibt, muss auch der Wert einer Integrals stets **positiv** sein. Man berechnet im 1. Schritt das Integral, ist das Ergebnis negativ, so setzt man bis zum ersten Rechenschritt Betragsstriche.

Man darf **niemals** über eine **Nullstelle hinweg** integrieren, da dadurch die Flächendifferenz entstehen würde. *Es wird also im 1.Schritt auf Nullstellen der Intefrandfunktion untersucht und das Integral anschließend in Bereiche unterteilt.* 

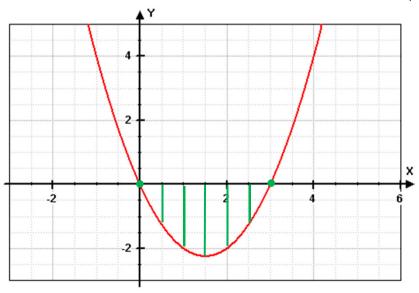
#### **INTEGRALRECHNUNG III**

#### Beispiel (unbestimmtes Integral):

$$\int (x^3 - 2x + 5) dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 - x^2 + 5 \cdot x + C$$

Beispiel (bestimmtes Integral/zwischen Graph und x-Achse):

$$\int_{0}^{3} (x^{2} - 3x) dx = \left| \frac{1}{3} x^{3} - \frac{3}{2} x^{2} \right|_{0}^{3} = \left| F(3) - F(0) \right| = \left| \left[ \left( 9 - \frac{27}{2} \right) - 0 \right] \right| = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}$$



#### **INTEGRALRECHNUNG IV**

#### Beispiel (bestimmtes Integral/ mit Nullstellen innerhalb der Grenzen):

$$\int_{1}^{5} (x-3)dx = \int_{1}^{3} (x-3)dx + \int_{3}^{5} (x-3)dx$$

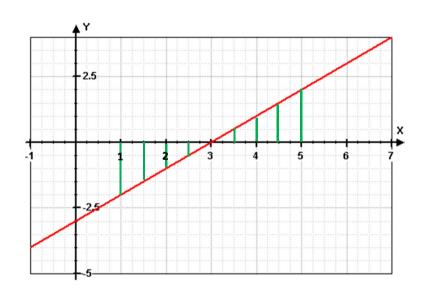
$$\int_{1}^{5} (x-3)dx = \left| \left( \frac{1}{2}x^{2} - 3x \right) \right|_{1}^{3} + \left| \left( \frac{1}{2}x^{2} - 3x \right) \right|_{3}^{5}$$

$$\int_{1}^{5} (x-3)dx = \left| F(3) - F(1) \right| + \left| F(5) - F(3) \right|$$

$$\int_{1}^{5} (x-3)dx = \left| \left( \frac{9}{2} - 9 \right) - \left( \frac{1}{2} - 3 \right) \right| + \left| \left( \frac{25}{2} - 9 \right) - \left( \frac{9}{2} - 9 \right) \right|$$

$$\int_{1}^{5} (x-3)dx = \left| \left( -\frac{9}{2} \right) - \left( -\frac{5}{2} \right) \right| + \left| \left( \frac{7}{2} \right) - \left( -\frac{9}{2} \right) \right|$$

$$\int_{1}^{5} (x-3)dx = \left| -\frac{4}{2} \right| + \left| \frac{16}{2} \right| = 10$$



### INTEGRALRECHNUNG V

Die Stammfunktion einer höheren Funktion kann mit folgender Methodik gebildet werden:

- 1. Die äußere Funktion wird als Nebenrechnung aufgeleitet.
- 2. Diese Testfunktion wird nun abgeleitet.
- 3. Mittels Faktoren kann nun die Ableitung der Stammfunktion ausgleichen werden.

Beispiel: 
$$f(x) = 2 \cdot e^{3x+12}$$

1. Aufleitung: 
$$G(x) = e^{3x+12}$$

2. Ableitung: 
$$g(x) = e^{3x+12} \cdot [3x+12]' = 3 \cdot e^{3x+12}$$

3. Ausgleich: 
$$3 \cdot ? = 2$$
$$F(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{3x+12}$$

Probe: 
$$F'(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{3x+12} \cdot \left[3x+12\right]' = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot e^{3x+12} = 2 \cdot e^{3x+12} = f(x)$$

1) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die zugehörige Stammfunktion.

a) 
$$f(x) = 3x - 6x^2 - 5x^4 + 12$$

b) 
$$g(x) = \frac{7}{x^2} - \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x}$$

2) Bestimmen Sie die Fläche die von der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird.

a) 
$$g(x) = -x^2 - 3x - 2 \land x - Achse$$

3) Berechnen Sie die Nullstellen der Integrandfunktion und geben anschließend den Flächeninhalt des Integrals an.

a) 
$$\int_{1}^{4} (x^2 + 2x - 8) dx$$

b) 
$$\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^3) dx$$