MATHEMATIK

24.04.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Nennen Sie die 2 wichtigsten Eigenschaften von Mengen!
- ✓ Wie können Sie ein Intervall definieren?
- ✓ Wie funktioniert die Modulo-Operation?
- ✓ Wofür braucht man das „de Morgan – Gesetz“?
- ✓ Was versteht man unter einem neutralen Objekt?
- ✓ Was wird durch die Inklusion beschrieben?
- ✓ Was versteht man unter der Antisymmetrie?
- ✓ Welche Gesetze der Mengenlehre gibt es auch in der Arithmetik?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Anwendung und Aufgaben zum Bereich der Mengenlehre.
- ✓ Warum ist eine komplexe Zahl ein Vektor?
- ✓ Wie kann ich eine komplexe Zahl darstellen?
- ✓ Was versteht man unter dem Argument bzw. Betrag?
- ✓ Wie rechne ich ganz einfach mit komplexen Zahlen?
- ✓ Wie potenziert man komplexe Zahlen (Pascal‘sche Dreieck)?
- ✓ Wie kann man am besten komplexe Zahlen radizieren?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

1) Beschreiben Sie alle ganzen Zahlen zwischen -5 und 10, die durch drei aber nicht durch 4 teilbar sind.

2) Definieren Sie die natürlichen Zahlen größer gleich vier und kleiner 50, die durch 4 und durch 7 teilbar sind.

3) Gegeben sei die Menge M aller Studierenden an der THM Wetzlar in Form der Matrikelnummer. Gesucht ist die Menge der Studierenden, wo die Quersumme der Matrikelnummer größer 15 ist.

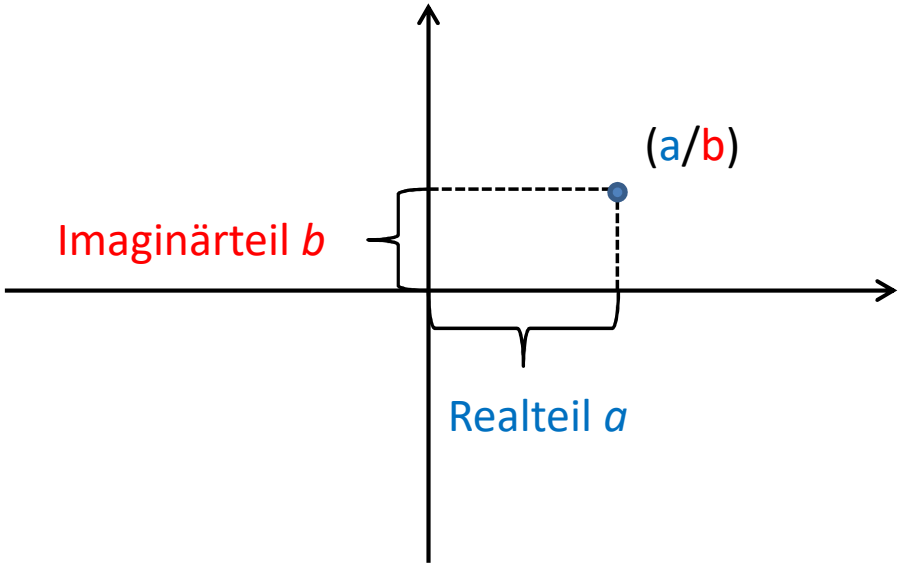
KOMPLEXE ZAHLEN I

Jacques Hadamard (1865–1963)

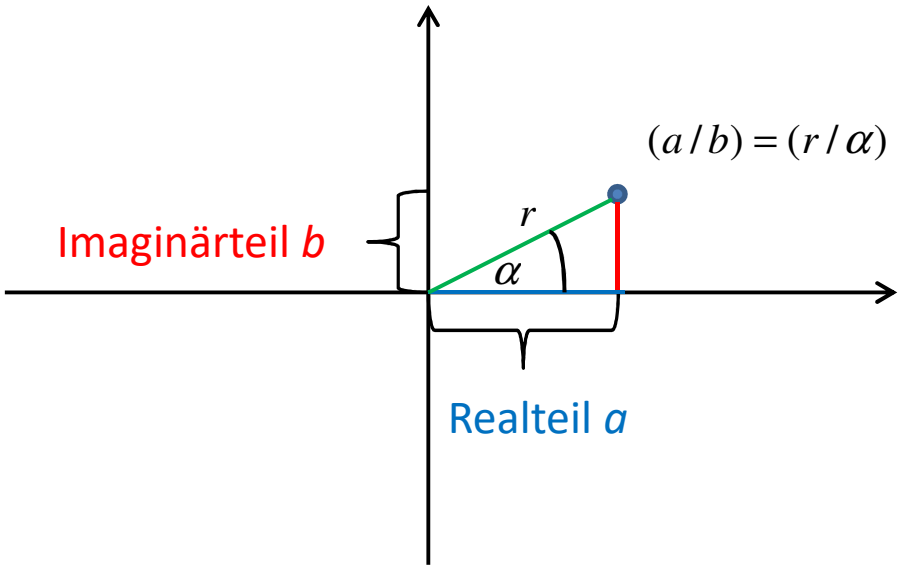
Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Aussagen über reelle Zahlen führt über komplexe Zahlen.

$$z = a + b \cdot i; i = \sqrt{-1}$$

Realteil Imaginärteil



KOMPLEXE ZAHLEN II



a = Ankathete

b = Gegenkathete

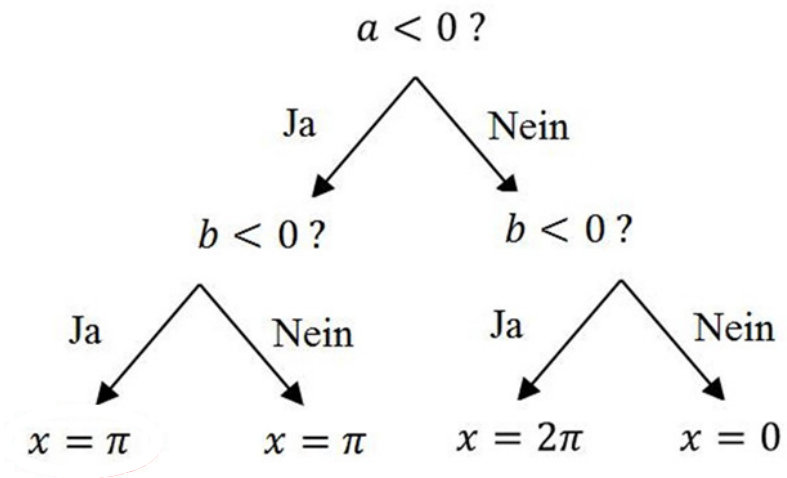
r = Hypothenuse

Betrag: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument: $\alpha = \arctan\frac{b}{a} + x \begin{cases} a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow x = 0\pi \\ a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow x = 2\pi \\ a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow x = \pi \\ a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$

KOMPLEXE ZAHLEN III

Entscheidungsbaum für das Argument von $z = a + b \cdot i$



<u>Anmerkung</u>:
Wenn die komplexe Zahl direkt auf einer Achse liegt, also eine der Koordinaten null ist, müssen Sie für das Argument immer ein Vielfaches von 90° nutzen.

KOMPLEXE ZAHLEN III

Potenzen des Imaginärteils i^{EXP}:

$$i^{0+4\cdot n} = i^0 \cdot i^{4\cdot n} = 1\cdot\left(i^4\right)^n = 1\cdot 1^n = 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 0$$

$$i^{1+4\cdot n} = i^1 \cdot i^{4\cdot n} = i\cdot\left(i^4\right)^n = i\cdot 1^n = i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 1$$

$$i^{2+4\cdot n} = i^2 \cdot i^{4\cdot n} = \left(\sqrt{-1}\right)^2\cdot\left(i^4\right)^n = (-1)\cdot 1^n = -1\cdot 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 2$$

$$i^{3+4\cdot n} = i^3 \cdot i^{4\cdot n} = \left(\sqrt{-1}\right)^2\cdot i\cdot\left(i^4\right)^n = (-i)\cdot 1^n = -i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 3$$

<u>Beispiel:</u>

$$(3+2i)+(7-5i) = (3+7)+(2-5)i = 10-3i$$

$$(3+2i)\cdot(7-5i) = (3\cdot 7)+(3\cdot(-5i))+(2i\cdot 7)+(2i\cdot(-5i)) = 21-15i+14i-10i^2 = 31-i$$

$$2i^3\cdot(3+2i)^2 = -2i\cdot(9+12i+4i^2) = -2i\cdot(5+12i) = 24-10i$$

KOMPLEXE ZAHLEN IV

Darstellung einer komplexen Zahl:

✓ <u>Kartesische Darstellung:</u> $z = a + b \cdot i$

✓ <u>Trigonometrische Darstellung:</u> $z = r \cdot \left(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\right)$

✓ <u>Exponentielle Darstellung:</u> $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Beispiel: $z = 3 - 4 \cdot i$

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha &= \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 360 \approx 307° \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z &= 5 \cdot \left(\cos(307) + i \cdot \sin(307)\right) \\ z &= 5 \cdot e^{i \cdot 307} \end{aligned}$$