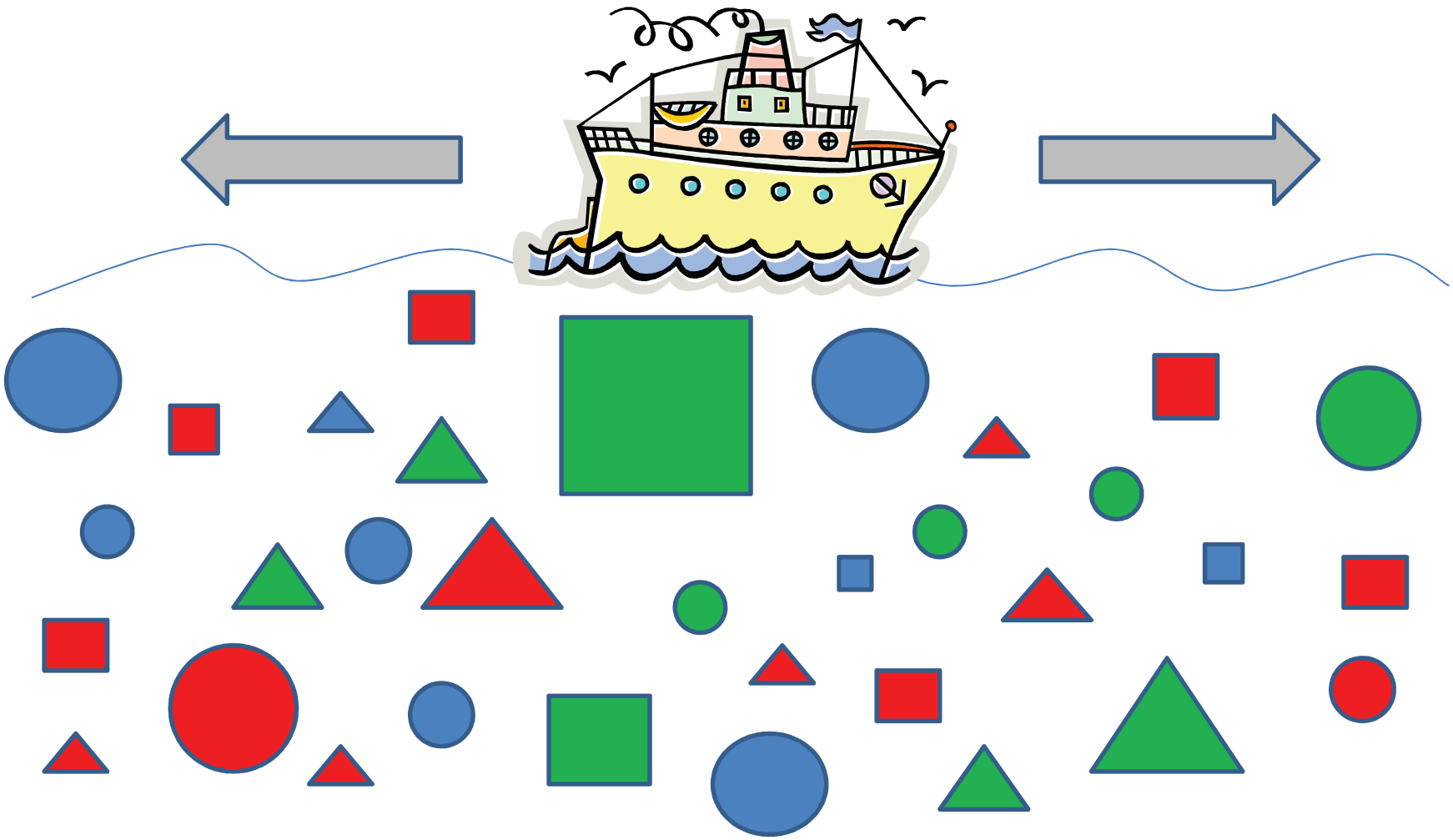
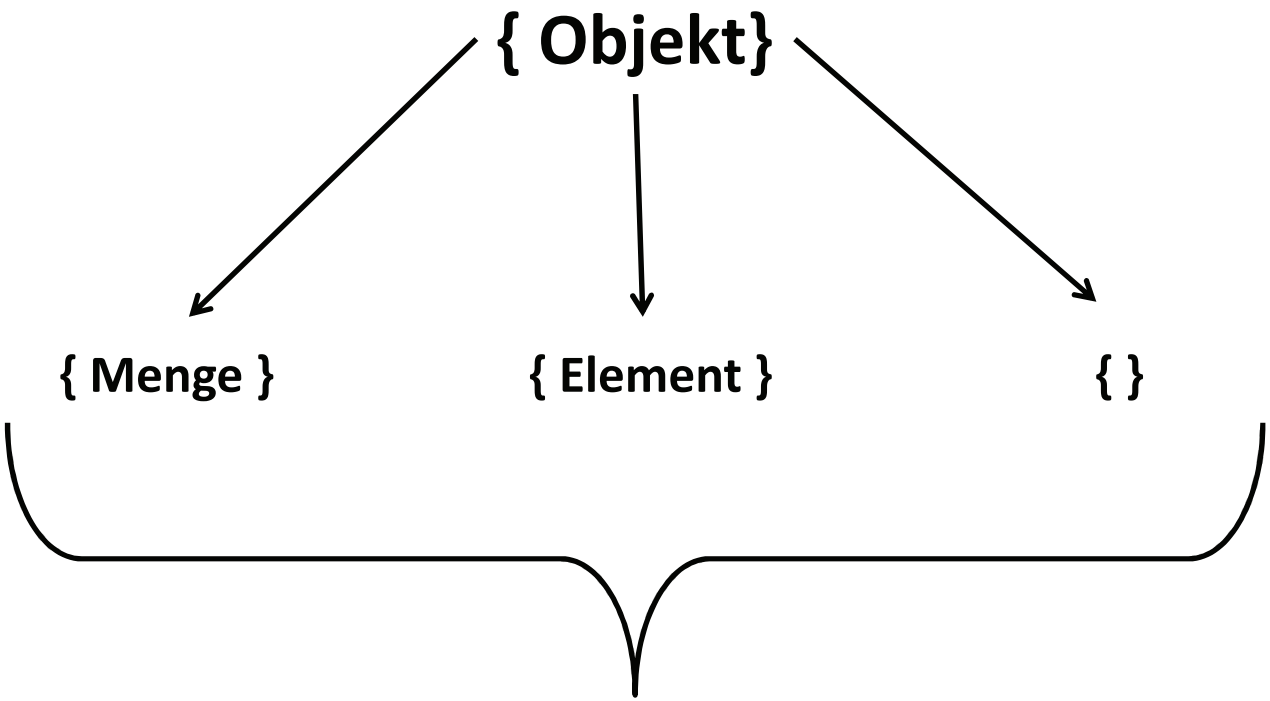
MATHEMATIK

10.04.2017

URKNALL DER MATHEMATIK



MENGENDEFINITION



Reihenfolge spielt keine Rolle

Unterscheidbarkeit der Objekte (redundanzfrei)

OBJEKTFORMEN

Objekt	Beschreibung
$\{a, b\}$	
$(5; 8)$	
$-7{,}6$	
$\{\{8; 15; 21\}\}$	
$(4/-2{,}3/1{,}4)$	
$\{(-2; 4]\}$	
$3; 15$	
$[7; 7[$	
$\{-3{,}2; 3; \{32\}\}$	
$\{(5{,}6{,}7); (8{,}2{,}1)\}$	

DARSTELLUNGSFORMEN

Bei der Definition einer Menge mittels deren **Eigenschaften**, muss im ersten Teil stets der Bereich gewählt werden, der als **Basis (Welt)** verwendet werden soll. Dieser ist so **klein als möglich** zu definieren.
Anschließend erfolgt die Beschreibung einer **Bedingung**, durch die die Zahlen der Lösungsmenge aus der Welt **herausgefiltert** werden können.

$$M = \{\underbrace{x \in Grundmenge}_{\text{Welt}} \mid \underbrace{Formel(a) = Formel(b)}_{\text{Bedingung}}\}$$

Menge

<u>Menge</u>: Großbuchstabe für die Lösungsmenge

<u>Welt</u>: Variablendefinition aus der Grundmenge

<u>Bedingung</u>: Mathematische Formel bzw. verbaler Ausdruck

MODULO

Die Modulo-Funktion entspricht einem Restwertoperator, d.h. bei einer ganzzahligen Division wird der Rest als Ergebnis dargestellt.

$$X \bmod Y = R$$

Zähler ← X; Nenner (Divisor) ← Y; Restwert ← R

<u>Beispiel</u>:

$5 \bmod 2 = 1$, denn $5 \div 2 = 2$ Rest 1

$23 \bmod 5 = 3$, denn $23 \div 5 = 4$ Rest 3

<u>Teilbarkeit</u>: Restwert muss 0 ergeben

$x \bmod 7 = 0$ x ist teilbar durch 7

$x \bmod 2 <> 0$ x ist nicht durch 2 teilbar (ungerade Zahl)

ZAHLENMENGEN

$N \rightarrow$	Natürliche Zahlen	$\{0;1;2;3...\}$
$Z \rightarrow$	Ganze Zahlen	$\{...-2;-1;0;1;2...\}$
$Q \rightarrow$	Rationale Zahlen	$\frac{a}{b}; a \in Z \wedge b \in Z \setminus \{0\}$ *Endliche Nachkommastellen, Periode*
$R \rightarrow$	Reelle Zahlen	$\{\pi; e; \sqrt{2}; ...\}$ *Unendliche Nachkommastellen*
$C \rightarrow$	Komplexe Zahlen	$z = a + b \cdot i \wedge i = \sqrt{-1}$

AUFGABEN

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

1) Beschreiben Sie alle natürlichen Zahlen, die durch drei teilbar und kleiner 42 sind.

2) Definieren Sie die ganzen Zahlen im Bereich von -22 bis 22, die durch zwei oder durch 7 teilbar sind.

3) Geben Sie die natürlichen Zahlen an, die größer 100 bzw. kleiner als 30 sind und nicht durch fünf dafür aber durch 6 teilbar sind.

4) Nennen Sie alle ganzen Zahlen zwischen -4 und 12, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind.

5) Welche natürlichen Zahlen größer als 44 sind durch 5 und auch durch 3 aber nicht durch 6 teilbar sind.

TEILMENGE / INKLUSION

Sofern die Ausgangsmenge ein Teil oder komplett innerhalb einer weiteren Menge vorhanden ist, so spricht man von einer Teilmengenbeziehung bzw. von einer Inklusion.

Methodik:

1) Streichen der Mengenklammer bei der Ausgangsmenge

2) Jedes Objekt muss bzgl. Wert und Format in der 2. Menge auftauchen

$$\{a\} \subset Alphabet$$

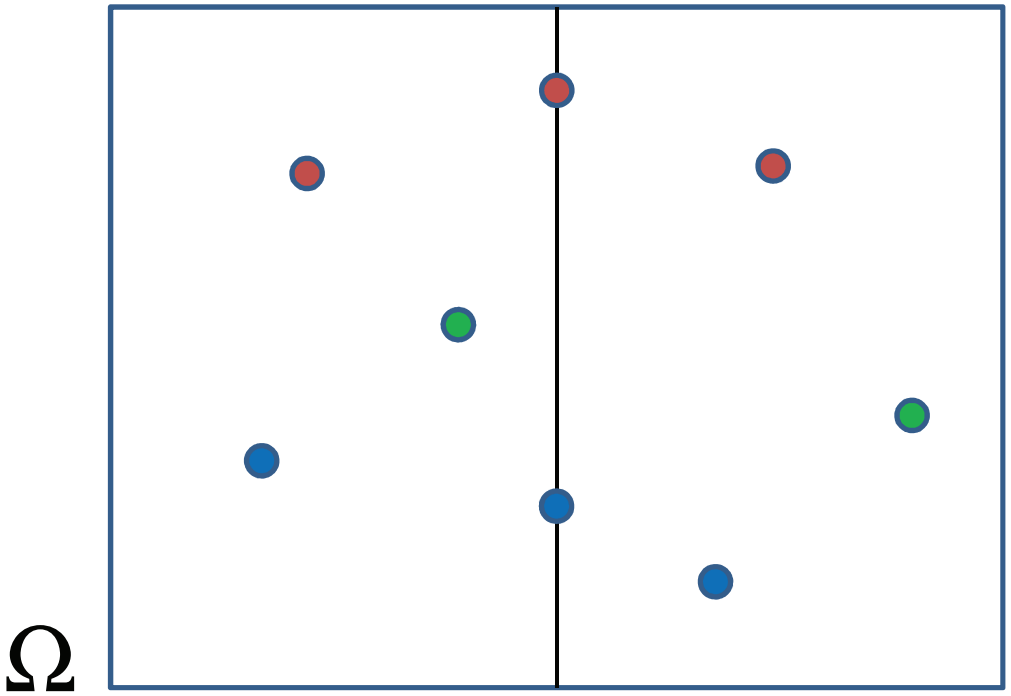
$$\Downarrow$$

$$a \in Alphabet$$

Eigenschaften:

- ✓Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge $\{\ \} \subset A$
- ✓**reflexiv:** Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst $A \subset A$
- ✓**transitiv:** logische Schlussfolgerungen sind zugelassen $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- ✓**antisymmentrie:** Beweisprinzip der Extensionalität $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN



✓**Symmetrie**:
Zu jedem Punkt gehört ein Spiegelpunkt.

✓**Asymmetrie**:
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt.

✓**Antisymmetrie:**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt aber mindestens ein Punkt auf der Spiegelachse.

Sind mehrere Symmetrievarianten vorhanden, so kann keinerlei Aussage über das Symmetrieverhalten getroffen werden.

JUNKTOREN

Junktoren entsprechen Verbindungen / Operatoren die beliebige Objekte miteinander verknüpfen können (Artithmetik: „+“, „-“, „*“, „:“).

<u>UND</u> $(A \cap B)$:
Das Objekt der Lösung gehört gleichzeitig zu den Menge A und B. (*Durchschnitt*)
Beispiel: Primzahl $\cap$ gerade, natürliche Zahl $=\{2\}$

<u>ODER</u> $(A \cup B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A oder B oder zu A und B. (*Vereinigung*)
Beispiel: ungerade Zahl $\cup$ gerade, natürliche Zahl = N

<u>NICHT</u> $(A \setminus B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A aber nicht zu B. (*Differenz*)
Beispiel: natürliche Zahl $\setminus$ gerade, natürliche Zahl = ungerade Zahl

GESETZE / ZUSAMMENHÄNGE

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan:	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Komplement:	$\overline{A} \cap A = \{\ \}$	$\overline{A} \cup A = \Omega$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

<u>Zusammenhänge</u> zwischen $A; \{\ \}, \Omega$

$\cap$: $A \cap A = A$ $\quad A \cap \Omega = A$ $\quad A \cap \{\ \} = \{\ \}$

$\cup$: $A \cup A = A$ $\quad A \cup \Omega = \Omega$ $\quad A \cup \{\ \} = A$

Neutrales Objekt: $A \cap \Omega = A$ $\quad A \cup \{\ \} = A$

BEGRIFFE

<u>Präfix (lat. prae „*vor*“ und fix „*fest*“):</u>
Ist in der deutschen Sprache eine sogenannte Vorsilbe und beschreibt in der Mathematik ein Objekt, dass sich vor einem Term o.ä. befindet.

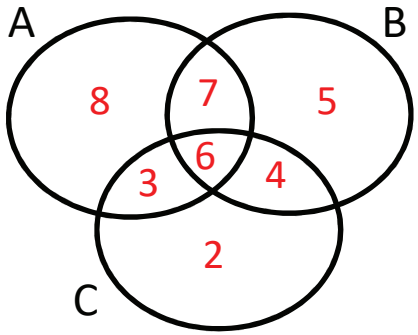
Ein Präfix vor einer Einheit gibt z.B. Auskunft darüber mit welcher Zehnerpotenz zu multiplizieren ist ($1\ GB = 1\ GigaByte = 1 \cdot 10^9\ Byte$)

<u>Infix (lat. in „hinein“ und fix „*fest*“):</u>
Ein Infix steht also innerhalb eines Ausdruck.
Dadurch existieren die Operatoren der Arithmetik in der Infix-Notation ($73 - 42$)

<u>Postfix (lat. post „nach“ und fix „*fest*“):</u>
Ein Postfix steht also stets hinter einem Term oder Ausdruck.
So ist z.B. das Gleichheitszeichen ein Postfix dar ($73 - \mathrm{x} = 42$)

AUFGABEN

1) Ermitteln Sie die gefragten Lösungsmengen aufgrund des gegebenen Venn'schen Diagramms.



$a) A \cup C$

$b) A \setminus (B \cup C)$

$c) (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$d) (A \cup B) \setminus C$

$e) (A \cap B) \setminus (A \cup C)$

$f) (C \cup A) \cap (B \cup C)$

2) Beweisen Sie die folgenden Ausdrücke und benennen Sie dabei alle angewandten Gesetze

a) Das Absorptionsgesetz $A \cap (A \cup B) = A$

b) Vereinfachen Sie die Robbinsgleichung: $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup \overline{B}}}$