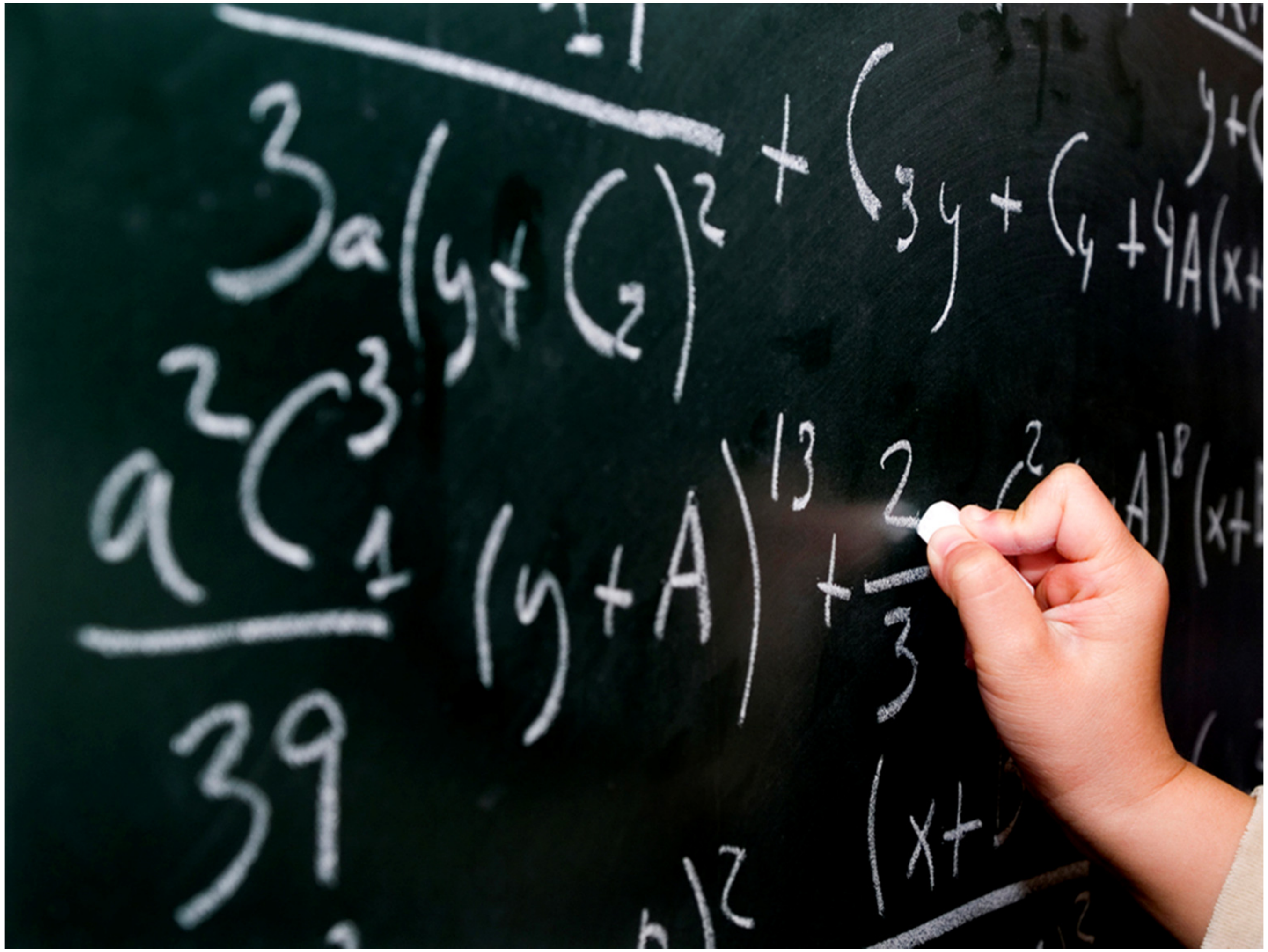
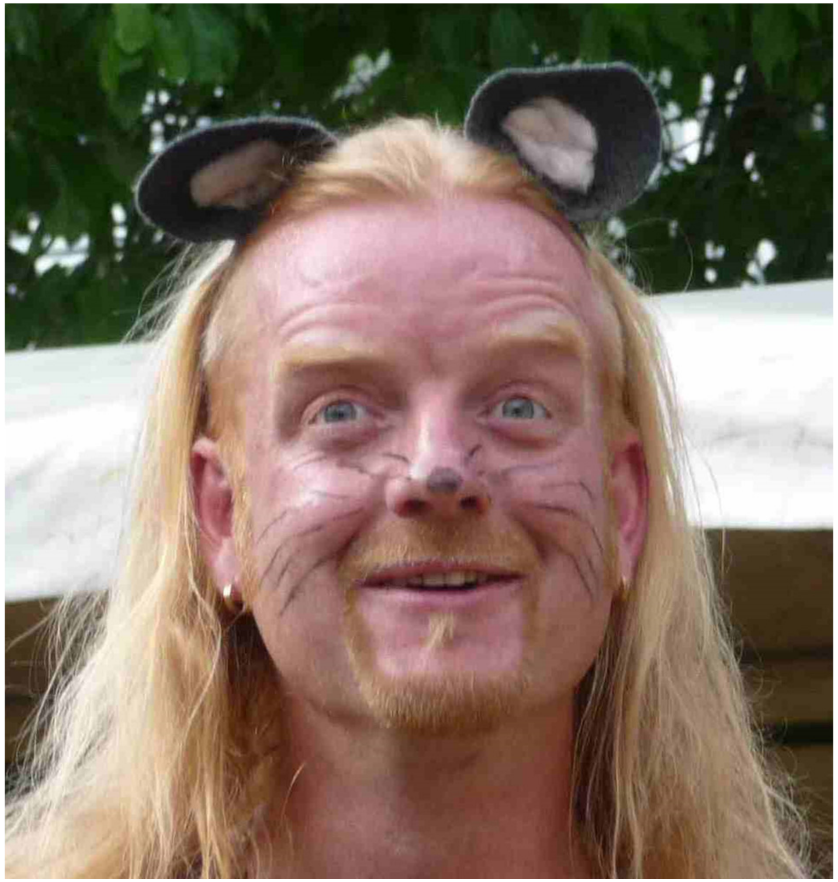
Mathematik (BW8)



Wintersemester 2013/14

Torsten Schreiber

Mathematik ist begreifbar...



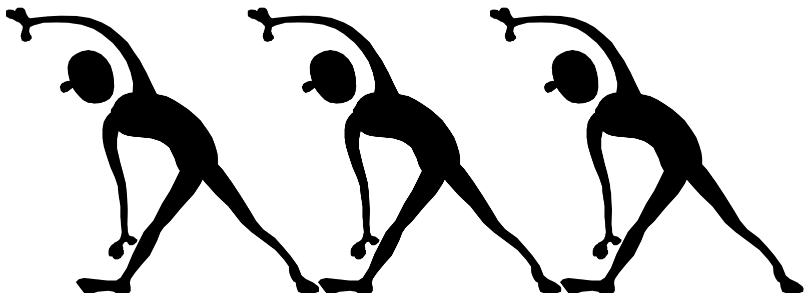
www.mathematik-guru.de

... und macht sogar Spaß!

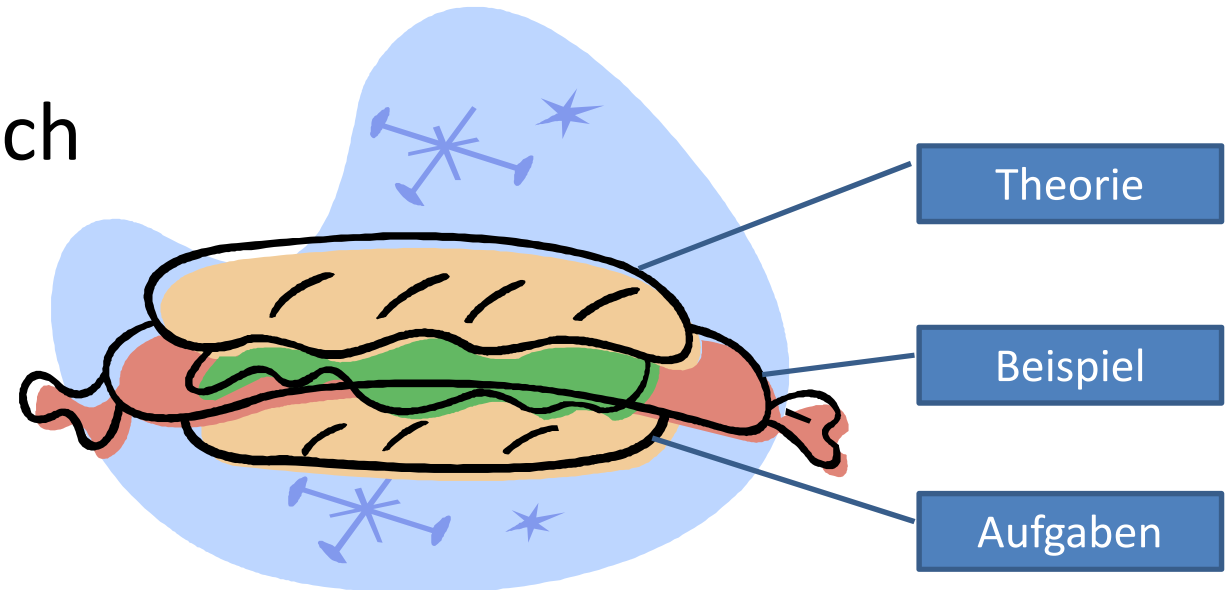
schreiber@mathematik-guru.de

Methodik meiner Veranstaltung

- WarmUp



- n-Sandwich

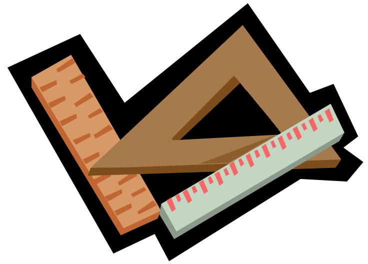


Mathematik (BW8)

Lernziele / Kompetenzen
Die Studierenden haben einen sicheren Umgang mit algebraischen Termen und können lineare und quadratische Gleichungen und Ungleichungen sicher lösen. Sie kennen wichtige mathematische Funktionen und ihre Eigenschaften; sie beherrschen deren Differentiation und Integration.

Themengebiete
- ✓ Zahlen, Potenzen, Exponenten, Terme, Identitäten, Umformungen, Brüche
- ✓ Gleichungen und Ungleichungen (lineare, quadratische)
- ✓ Lineare-, Potenz- und Exponentialfunktionen
- ✓ Differentiation
- ✓ Eigenschaften von Funktionen
- ✓ Integration

Die Klausur



Theorie der schönen Zahlen

Taschenrechner brauchen wir nicht!

Bücher gehören in die Bibliothek

Alles was ich geschrieben habe, darf ich auch nutzen.

Literaturverzeichnis

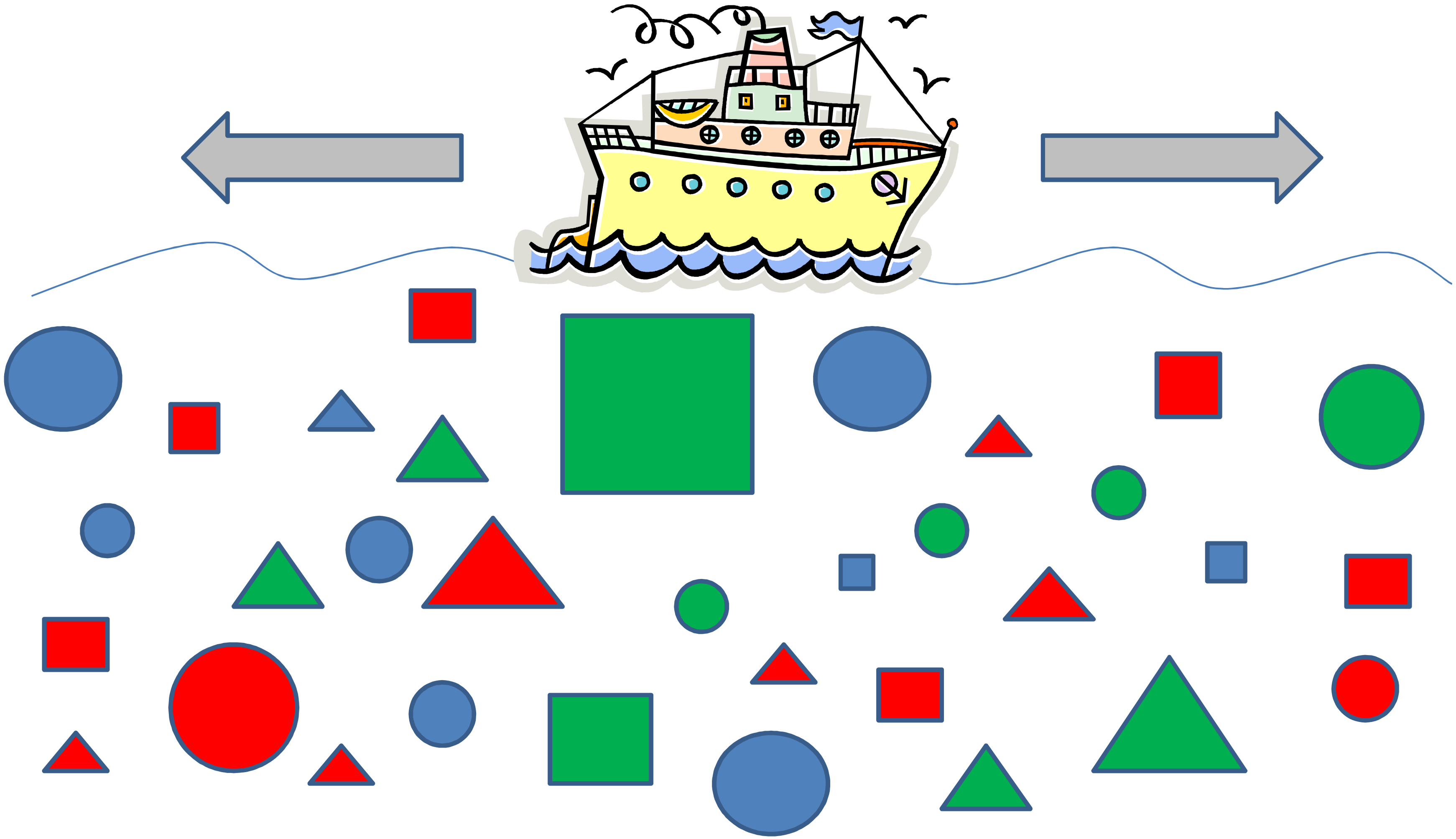
Bereich	Autor	Titel	Zusatz	Verlag	ISBN
Algebra		Lehr- und Übungsbuch Mathematik	Band 4	Harri Deutsch	3-8171-1123-1
Algebra	Papula	Mathematik für Ingenieure	Band 2	Vieweg	3-528-94237-1
Algebra	Teschl	Mathematik für Informatiker	Band 1	Springer	978-3-540-70824-7
Analysis		Lehr- und Übungsbuch Mathematik	Band 3	Harri Deutsch	3-87144-403-0
Analysis	Papula	Mathematik für Ingenieure	Band 1	Vieweg	3-528-94236-3
Aufgaben	Papula	Mathematik für Ingenieure	Aufgabensammlung	Vieweg	978-38348-0157-9
Mathematik	Hartmann	Mathematik für Informatiker	Lehrbuch	Vieweg	3-8348-0096-1
Formelsammlung	Bartsch	Mathematische Formeln	Taschenbuch	Harri Deutsch	3-87144-774-9
Formelsammlung	Papula	Mathematische Formelsammlung	Formeln	Vieweg	3-528-74442-1
Grundlagen		Lehr- und Übungsbuch Mathematik	Band 1	Harri Deutsch	3-87144-401-4
Grundlagen		Lehr- und Übungsbuch Mathematik	Band 2	Harri Deutsch	3-87144-402-2
Grundlagen	Schwarze	Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler	Aufgabensammlung	NWB	3-482-43315-1
Grundlagen	Schwarze	Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler	Band1: Grundlagen	NWB	3-482-51561-1
Grundlagen	Schwarze	Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler	Elementare Grundlagen für Studienanfänger	NWB	3-482-56646-1
Finanzmathematik	Purkert	Brückenkurs Mathematik	Wirtschaftswissenschaftler	Vieweg	978-3-8348-1505-7
Finanzmathematik	Locarek	Finanzmathematik	Lehr- und Übungsbuch	Oldenbourg	3-486-24040-4
Statistik	Papula	Mathematik für Ingenieure	Band 3	Vieweg	3-528-34937-9
Statistik	Schwarze	Grundlagen der Statistik	Band 1: Beschreibende Verfahren	nwb Studium	978-3-482-59481-6
Statistik	Schwarze	Aufgabensammlung zur Statistik	Aufgaben mit Lösungen	nwb Studium	978-3-482-43456-3

ZIELSETZUNG

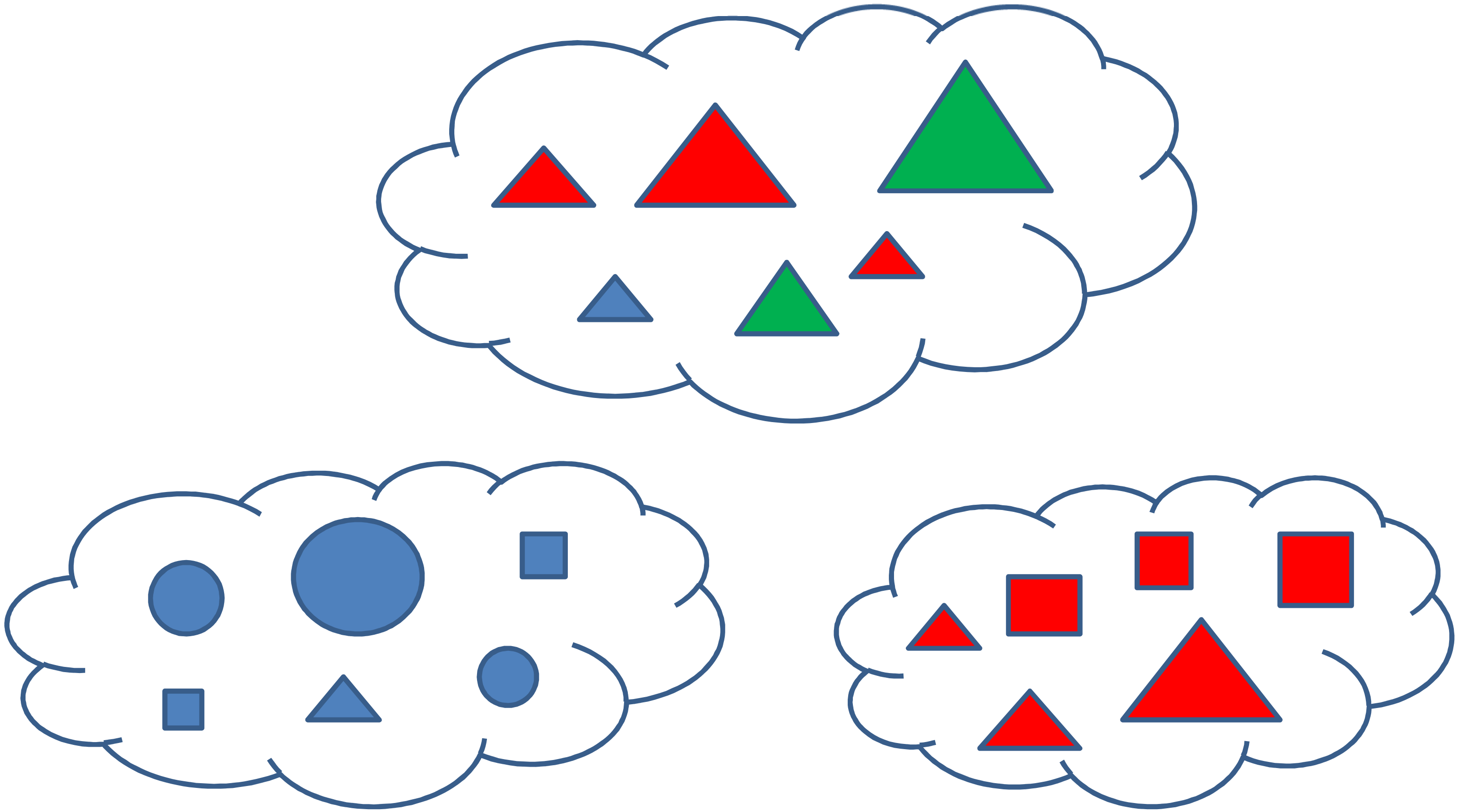
Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was sind die Objekte der Mengenlehre?
- ✓ Welche Darstellungsformen gibt es?
- ✓ Was bedeutet verbale bzw. mathematische Bedingung?
- ✓ Aus welchen Junktoren ist die Mengenlehre aufgebaut?
- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen UND und ODER?
- ✓ Was bedeutet die Modulo-Operation?
- ✓ Welche Zahlenmengen werden definiert?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

URKNALL DER MATHEMATIK



GRUPPEN VON MENGEN



MENGENDEFINITION

{ Objekt}

{ Menge } **{ Element }** **{ }**

Reihenfolge spielt keine Rolle

Unterscheidbarkeit der Objekte (redundanzfrei)

OBJEKTFORMEN

$\{1{,}2\} \Rightarrow$	Menge mit 1 Objekt: Element 1,2
$(1;2) \Rightarrow$	Element als Tupel mit den Koordinaten 1 und 2
$1{,}2 \Rightarrow$	Element mit dem Wert 1,2
$\{\{1;2\}\} \Rightarrow$	Menge mit 1 Objekt: Menge mit den Elementen 1 und 2
$\{(1;2)\} \Rightarrow$	Menge mit 1 Objekt: Tupel aus 1 und 2
$1;2 \Rightarrow$	2 Elemente 1 und 2
$\{1{,}2;1;\{2\}\} \Rightarrow$	Menge mit 3 Objekten: Element 1,2 und 1 sowie der Menge aus 2

DARSTELLUNGSFORMEN

1) Aufzählung:
   Die einzelnen Objekte werden innerhalb der Menge aufgeführt, wobei Platzhalter in Form von „...“ dargestellt werden.
2) Einschluss:
   Basierend auf einer beliebigen Ausgangsmenge wird ein Gesetz definiert, das die enthaltenden Objekte beschreibt.
3) Ausschluss:
   Aus einer Grundzahlenmenge werden die Objekte definiert, die nicht enthalten sein dürfen.

Beispiel: *Mengen der geraden, natürlichen Zahlen*

$$1) G_{\mathrm{N}} = \{2;4;6;8;...\}$$

$$2) G_{\mathrm{N}} = \{x \in \mathrm{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$$

$$3) G_{\mathrm{N}} = x \in \mathrm{N} \setminus \{x \in \mathrm{N} \mid x \bmod 2 <> 0\}$$

MODULO

Die Modulo-Funktion entspricht einem Restwertoperator, d.h. bei einer ganzzahligen Division wird der Rest als Ergebnis dargestellt.

$$X \bmod Y = R$$

Zähler   Nenner (Divisor)   Restwert

<u>Beispiel</u>:

$5 \bmod 2 = 1$, denn $5 \div 2 = 2$ Rest 1

$23 \bmod 5 = 3$, denn $23 \div 5 = 4$ Rest 3

<u>Teilbarkeit</u>: Restwert muss 0 ergeben

$x \bmod 7 = 0$	x ist teilbar durch 7
$x \bmod 2 <> 0$	x ist nicht durch 2 teilbar (ungerade Zahl)

ZAHLENMENGEN

$N \rightarrow$	Natürliche Zahlen	$\{1;2;3...\}$
$Z \rightarrow$	Ganze Zahlen	$\{... - 2; -1; 0; 1; 2...\}$
$Q \rightarrow$	Rationale Zahlen	$\frac{a}{b}; a \in Z \wedge b \in Z \setminus \{0\}$ *Endliche Nachkommastellen, Periode*
$R \rightarrow$	Reelle Zahlen	$\{\pi; e; \sqrt{2}; ...\}$ *Unendliche Nachkommastellen*
$C \rightarrow$	Komplexe Zahlen	$z = a + b \cdot i \wedge i = \sqrt{-1}$

JUNKTOREN

Junktoren entsprechen Verbindungen / Operatoren die beliebige Objekte miteinander verknüpfen können (Artithmetik: „+“, „-“, „*“, „:“).

<u>UND</u> $(A \cap B)$:
Das Objekt der Lösung gehört gleichzeitig zu den Menge A und B. (*Durchschnitt*)
Beispiel: Primzahl $\cap$ gerade, natürliche Zahl $=\{2\}$

<u>ODER</u> $(A \cup B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A oder B oder zu A und B. (*Vereinigung*)
Beispiel: ungerade Zahl $\cup$ gerade, natürliche Zahl = $\mathbb{N}$

<u>NICHT</u> $(A \setminus B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A aber nicht zu B. (*Differenz*)
Beispiel: natürliche Zahl $\setminus$ gerade, natürliche Zahl = ungerade Zahl

AUFGABEN

1) Gegeben sind die folgenden Mengen: $A=\{2;4;6;8;10\}$ $B=\{1;2;3\}$ $C=\{2;3;5;7;\}$
Berechnen Sie: $A\cup(B\cup C)$ $B\cap C\setminus A$ $(A\cap B)\cap(C\cap A)$ $A\setminus(B\cup C)$

2) Über die Anzahl *n* der Elemente in der Untermenge A, B und C einer Menge mit 200 Elementen ist folgendes bekannt:
$n(A)=70$ $n(B)=120$ $n(C)=90$ $n(A\cap B)=50$ $n(A\cap C)=30$ $n(B\cap C)=40$
$n(A\cap B\cap C)=20$
Wie groß ist die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen?
$n(A\cup B)$ $n(A\cup B\cup C)$ $n(\overline{A}\cap B\cap C)$ $n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

3) Gegeben sind die Mengen der durch 5 teilbaren, ganzen Zahlen A und die Menge B mit {-10, -9, -8…8, 9, 10}. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Aussagen als Aufzählung und unter Verwendung der Eigenschaften bzgl. der ganzen Zahlenmenge:
a) $A\cap B$ b) $A\cup B$ c) A\B d) B\A

4) Gegeben sind die Menge $A=\{x\in\Re \mid 42\leq x<50\}$ und die Menge B der durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen (kleiner 45). Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):
a) $A\cap B$ b) $A\cup B$ c) A\B d) B\A

MATHEMATIK

04.11.2013

WIEDERHOLUNG

Im Bereich der Mengenlehre ist darauf zu achten, dass sich alle vorhandenen Objekte unterscheiden, d.h. ___________ sind.

Wird eine Menge mittels Eigenschaften beschrieben, so unterscheidet man zwischen einer mathematischen und ___________ Bedingung. Gehören einzelne Elemente nicht zu der gesuchten Menge, so werden diese mittels ___________ aus der Welt herausgenommen.

Beim _________werden die gesuchten Zahlen konkret definiert, wobei beim __________aus der maximalen Zahlenmenge die nicht dazugehörigen abgezogen werden.

Um einen Zahlenbereich _________zwei Zahlen zu definieren, so nimmt man die Und-Verbindung. Mittels Oder wird der Bereich ___________der Zahlen beschrieben.

Die Modulo-Operation ist eine ___________, d.h. man kann die Teilbarkeit einer Zahl beweisen, in dem man bei dem Modulo-Term auf _______vergleicht.

Die kleinst mögliche Zahlenmenge sind die _________Zahlen. Handelt es sich um die Menge der rationalen Zahlen, so kann man diese Zahlen auch als ________darstellen.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was sind Zusammenhänge zwischen Menge, Welt und dem Nichts?
- ✓ Welche Gesetze existieren in der Mengenlehre?
- ✓ Was versteht man unter einer Inklusion?
- ✓ Welche Symmetriearten gibt es?
- ✓ Was bedeutet eine Zerlegung bzw. Klasseneinteilung?
- ✓ Was ist eine Potenzmenge?
- ✓ Wie bildet man das kartesische Produkt?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

Aufgaben

Ü 4.3.1 *Gegeben seien die folgenden Mengen* $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x > 5\}$; $D = \{3, 4, 5, 6\}$.
Bestimmen Sie: **a)** $A \cap B$; **b)** $D \setminus A$; **c)** $B \cup D$; **d)** $\overline{B}_{\mathbb{N}}$;
e) $(A \cup B) \cap D$; **f)** $A \cap D$.

Ü 4.3.2 *Gegeben sind die Mengen*
$A = \{1, 10\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 10\}$; *und* $C = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 10\}$.
Bestimmen Sie: **a)** $A \setminus C$; **b)** $B \setminus (A \cup C)$; **c)** $B \cup C$; **d)** $B \cap C$.

Ü 4.3.3 *Gegeben seien die Mengen* $A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq x \leq 6\}$;
$B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}$; $C = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 2\}$;
$D = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x < 6\}$.
Bestimmen Sie die folgenden Mengen: **a)** $A \cap B$; **b)** $A \setminus D$; **c)** $A \cap C$;
d) $C \setminus A$; **e)** $B \cap C$; **f)** $B \cup C$; **g)** $A \cap \mathbb{N}$; **h)** $\overline{A}_{\mathbb{R}}$; **i)** $\overline{B}_{\mathbb{N}}$.

GESETZE / ZUSAMMENHÄNGE

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan:	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Komplement:	$\overline{A} \cap A = \{\ \}$	$\overline{A} \cup A = \Omega$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

<u>Zusammenhänge</u> zwischen $A; \{\ \}; \Omega$

$\cap:\quad A \cap A = A \qquad A \cap \Omega = A \qquad A \cap \{\ \} = \{\ \}$

$\cup:\quad A \cup A = A \qquad A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cup \{\ \} = A$

Neutrales Objekt: $A \cap \Omega = A \qquad A \cup \{\ \} = A$

AUFGABEN

Beweisen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benennung aller angewandten Gesetze

1) Das Absorptionsgesetz $A \cap (A \cup B) = A$

2) Das De Morgangesetz $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ mittels Komplement

3) Vereinfachen Sie die Robbinsgleichung: $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup \overline{B}}}$

TEILMENGE / INKLUSION

Sofern die Ausgangsmenge ein Teil oder komplett innerhalb einer weiteren Menge vorhanden ist, so spricht man von einer Teilmengenbeziehung bzw. von einer Inklusion.

Methodik:

1) Streichen der Mengenklammer bei der Ausgangsmenge

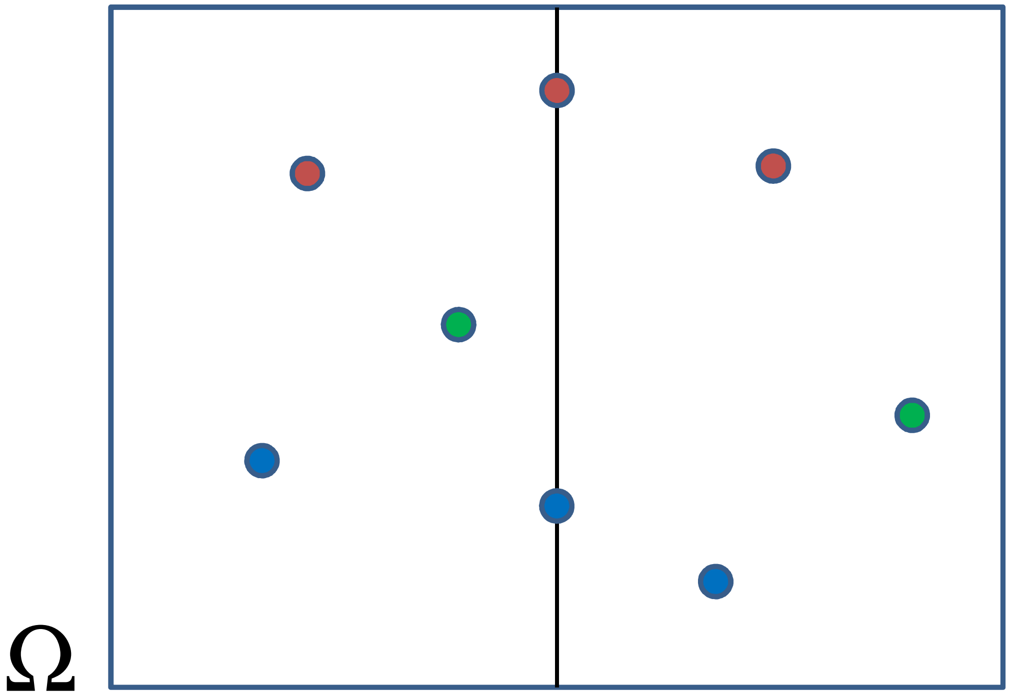
2) Jedes Objekt muss bzgl. Wert und Format in der 2. Menge auftauchen

$$\{a\} \subset Alphabet$$
$$\Downarrow$$
$$a \in Alphabet$$

Eigenschaften:

- ✓Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge $\{\ \} \subset A$
- ✓**reflexiv:** Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst $A \subset A$
- ✓**transitiv:** logische Schlussfolgerungen sind zugelassen $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- ✓**antisymmentrie:** Beweisprinzip der Extensionalität $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN



✓**Symmetrie:**
Zu jedem Punkt gehört ein Spiegelpunkt.

✓**Asymmetrie:**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt.

✓**Antisymmetrie:**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt aber mindestens ein Punkt auf der Spiegelachse.

Sind mehrere Symmetrievarianten vorhanden, so kann keinerlei Aussage über das Symmetrieverhalten getroffen werden.

KLASSENEINTEILUNG / ZERLEGUNG

Man spricht von einer Klasseneinteilung, sofern sicher gestellt werden kann, dass jedem Objekt aus der definierten Welt einer Klasse (Untermenge) zugeordnet werden kann.

<u>UND-Verknüpfung:</u>
Die UND-Verbindung zwischen jeder Klasse muss jeweils die leer Menge als Lösung haben. Man spricht dann von disjunkten Mengen.

<u>ODER-Verknüpfung:</u>
Die ODER-Verbindung zwischen allen Klassen muss zu einer Menge führen, die alle Objekte der definierten Ausgangsmenge enthält.

<u>Beispiel:</u>	*Alphabet*
UND-Verknüpfung:	$Konsonat \cap Vokal = \{\ \}$
ODER-Verknüpfung:	$Konsonat \cup Vokal = Alphabet$

POTENZMENGE

Eine Potenzmenge ist eine Ansammlung von allen möglichen Teilmenge basierend auf einer beliebigen Menge A.

Da jedes Objekt der Ausgangsmenge zwei Möglichkeiten besitzt, nämlich zu der Teilmenge zu gehören oder nicht, besteht jede Potenzmenge aus 2^n Untermengen.

Die Teilmengen existieren von der Länge Null (leere Menge) bis zu der Länge *n* (Anzahl der Objekte in der Ausgangsmenge).

<u>Beispiel:</u> $A = \{a;b;c;d\}$

$$P(A) = \left\{ \begin{matrix} \{\ \}; \\ \{a\};\{b\};\{c\};\{d\}; \\ \{a;b\};\{a;c\};\{a;d\};\{b;c\};\{b;d\};\{c;d\}; \\ \{a;b;c\};\{a;b;d\};\{a;c;d\};\{b;c;d\}; \\ \{a;b;c;d\} \end{matrix} \right\} \quad 2^n = 2^4 = 16 \quad \text{Untermengen}$$

KARTESISCHES PRODUKT

Das kartesische Produkt wird mittels Kreuzprodukt aus beliebigen Mengen gebildet, wobei jedes Objekt der linken Menge mit jedem weitern Objekt übrigen Mengen kombiniert wird.

Als Ergebnis entsteht ein n-dimensionales Tupel $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Die entstehende geordnete Punktmenge ist **nicht kommutativ**.

Der Euklidische Vektorraum lässt sich als kartesische Produkt somit wie folgt darstellen: $\Re^3 = \Re x \Re x \Re = (x_1, x_2, x_3)$

<u>Beispiel:</u> $A = \{a; b; c\}$ $B = \{1; 2;\}$

$$AxB = \{(a,1); (a,2); (b,1); (b,2); (c,1); (c,2);\}$$

$$BxA = \{(1,a); (1,b); (1,c); (2,a); (2,b); (2,c);\}$$

AUFGABEN

Mengenlehre (8 Punkte):
Gegeben sind die Menge A mit $A = \{-6;-5;-4...8;9;10\}$ und die Menge B der durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen (kleiner 15). Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung und 2 mal Eigenschaften):
a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

Mengenlehre:
Gegeben sind die Menge A der durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen und die Menge B mit {-4,-3,-2…5,6,7}. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Aussagen (2 mal Aufzählung und 2 mal Eigenschaften):
a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

Mengenlehre (12 Punkte):
Gegeben sind die Menge A mit $A = \{1;2;3;4;6;8;10;12\}$ und die Menge B der ungeraden natürlichen Zahlen (kleiner gleich 13). Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung und 2 mal Eigenschaften):
a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

MATHEMATIK

11.11.2013

AUFGABEN

1) Gegeben sei die Menge $A = \{42; \{x; y\}, \{\ \}\}$.
   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) x \in A$ $\quad b) \{x; y\} \subset A$ $\quad c) \{42\} \subset A$ $\quad d) \{42\} \in A$ $\quad e) 42 \in A$

   $f) 42 \subset A$ $\quad g) \{\ \} \in A$ $\quad h) \{\ \} \subset A$ $\quad i) \{\{\ \}\} \subset A$ $\quad j) \{4\} \subset A$

2) Welche der folgenden Aussagen über eine Potenzmenge $P(A)$ und einer Menge *A* sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) A \in P(A)$ $\quad b) A \subset P(A)$ $\quad c) \{\ \} \in P(A)$ $\quad d) \{\ \} \subset P(A)$

   $e) \{A\} \in P(A)$ $\quad f) \{A\} \subset P(A)$ $\quad g) \{\{\ \}\} \subset P(A)$ $\quad h) \{\{\ \}\} \in P(A)$

3) Bilden Sie die Potenzmenge basierend auf der Menge $A = \{\otimes; \nabla; \infty; \pi\}$.

AUFGABEN

4) Gegeben sei die Menge $A = \{\{\ \}; a; \{1;3\}; 5; \{5\}\}$.
   Welche der folgenden Untermengen sind Zerlegungen von *A* (Begründung)?

   $a)\{\{a\}; \{1;3\}; \{\{\ \}\}; \{5\}\}$ $\quad$ $b)\{\{a\}; \{1;3\}; \{\ \}; \{5; \{5\}\}\}$ $\quad$ $c)\{\{a; \{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{5; \{5\}\}\}$

   $d)\{\{a\}; \{\{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{\{5\}\}; \{5\}\}$ $\quad$ $e)\{\{5; a; \{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{5\}\}$

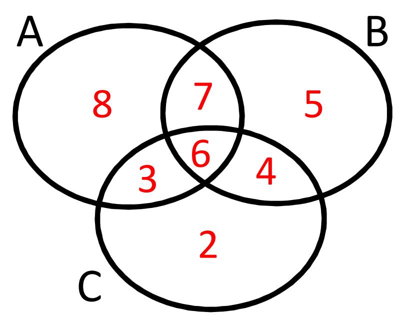
5) Gegeben sei die Menge $A = \{\alpha; \beta; \varepsilon\}$, $B = \{I; V\}$ und die Menge $C = \{x; y\}$.
   a) Bilden Sie das kartesische Produkt AxBxC.
   b) Bilden Sie das Kreuzprodukt aus AxB sowie aus CxA (grafische Darstellung).

6) Ermitteln Sie die gefragten Lösungsmengen aufgrund des gegebenen Venn'schen Diagramms.

   $a) A \cup C$ $\quad$ $d) (A \cup B) \setminus C$

   $b) A \setminus (B \cup C)$ $\quad$ $e) (A \cap B) \setminus (A \cup C)$

   $c) (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $\quad$ $f) (C \cup A) \cap (B \cup C)$



WIEDERHOLUNG

Treffen in der Mengenlehre zwei _________ Junktoren aufeinander müssen zwingend Klammern gesetzt werden.
Diese können dann mittels dem ___________aufgelöst werden.
Werden komplette Terme ________, so muss das de Morgan – Gesetz angewandt werden, d.h. man kehrt die vorhandenen Mengen und den _________um.
Im _____________werden Zusammenhänge zwischen einer Menge, der leeren Menge und der _______über dem Und- bzw. Oder-Operator definiert.
Ein neutrales Objekt verändert die Ausgangssituation niemals, d.h. in der Mengenlehre ist neben der ______________bzw. der Welt stets die Menge selbst neutral.
Die Inklusion beschreibt die __________________zweier Mengen, wobei die Teilmenge reflexiv,______ und antisymmetrisch ist.
Die Antisymmetrie existiert dann, wenn eine _________mit mindestens einem Pasch vorhanden ist.
Man spricht von einer Zerlegung, sofern die vorhandenen Klassen ________zueinander sind und die Oder-Verknüpfung wieder die ___________erzeugt.

ZIELSETZUNG

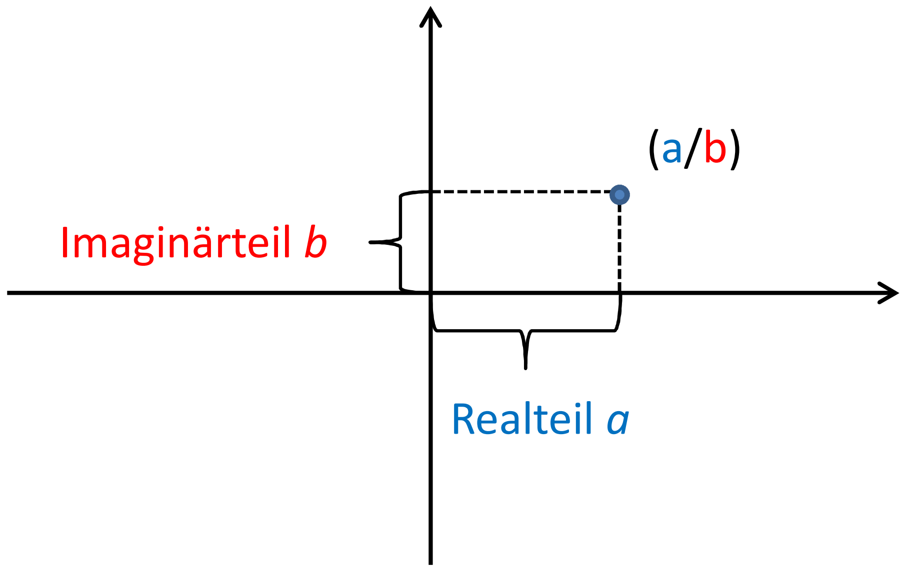
Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wann sprechen wir von einer komplexen Zahl?
- ✓ Was ist der Real- und der Imaginärteil?
- ✓ Wie bestimmt man den Betrag bzw. das Argument?
- ✓ Wie werden komplexe Zahlen addiert bzw. multipliziert?
- ✓ Was ist eine konjugiert komplexe Zahl?
- ✓ Wie funktioniert das Pascal‘sche Dreieck?
- ✓ Welche Darstellungsformen gibt es?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

KOMPLEXE ZAHLEN I

$$z = a + b \cdot i; i = \sqrt{-1}$$

Realteil Imaginärteil



$$i^{0+4\cdot n} = 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 0$$

$$i^{1+4\cdot n} = i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 1$$

$$i^{2+4\cdot n} = (-1) \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 2$$

$$i^{3+4\cdot n} = (-1)\cdot i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 3$$

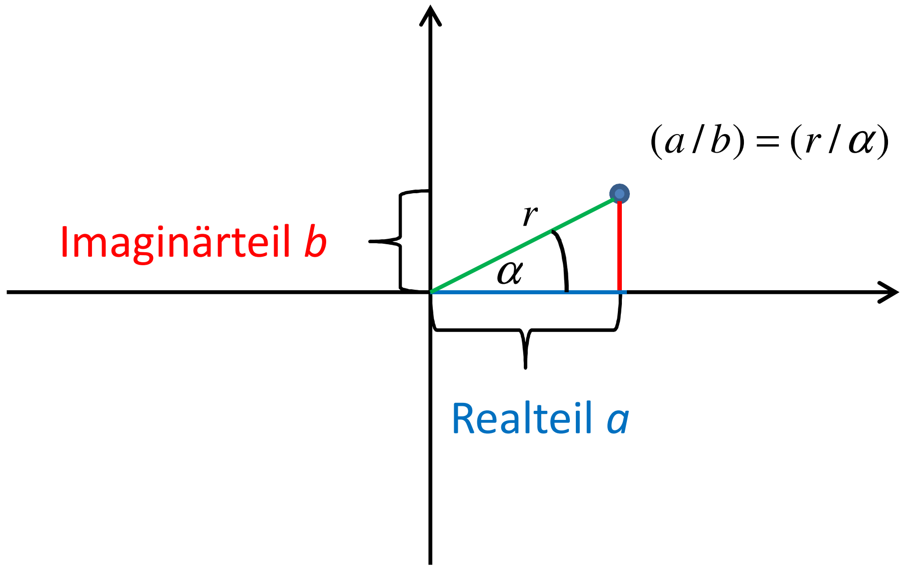
<u>Beispiel:</u>

$$(3+2i)+(7-5i)=(3+7)+(2-5)i = 10-3i$$

$$(3+2i)\cdot(7-5i)=(3\cdot 7)+(3\cdot(-5i))+(2i\cdot 7)+(2i\cdot(-5i)) = 21-15i+14i-10i^2 = 31-i$$

$$2i^3\cdot(3+2i)^2 = -2i\cdot(9+12i+4i^2) = -2i\cdot(5+12i) = 24-10i$$

KOMPLEXE ZAHLEN II



a = Ankathete

b = Gegenkathete

r = Hypothenuse

Betrag: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument: $\alpha = \arctan\frac{b}{a} + x$ $\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow x = 0\pi \\ a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow x = 2\pi \\ a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow x = \pi \\ a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow x = \pi \end{array} \right.$

KOMPLEXE ZAHLEN III

Darstellung einer komplexen Zahl:

✓<u>Kartesische Darstellung:</u> $z = a + b \cdot i$

✓<u>Trigonometrische Darstellung:</u> $z = r \cdot \left(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\right)$

✓<u>Exponentielle Darstellung:</u> $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Beispiel: $z = 3 - 4 \cdot i$

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha &= \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 360 \approx 307° \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z &= 5 \cdot \left(\cos(307) + i \cdot \sin(307)\right) \\ z &= 5 \cdot e^{i \cdot 307} \end{aligned}$$

KOMPLEXE ZAHLEN IV

Die konjugiert komplexe Zahl:

Um den Imaginärteil einer komplexen Zahl zu beseitigen , wird mittels des 3. Binoms der Ausdruck erweitert (konjugiert komplexen Zahl).

$$z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - \left(-b^2\right) = a^2 + b^2$$

Betrag: $z = 2 - 5i \Rightarrow \overline{z} = 2 + 5i$

$$r = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(2 - 5i) \cdot (2 + 5i)} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Division: $\dfrac{9 - 2i}{3 + i} \cdot \dfrac{3 - i}{3 - i} = \dfrac{27 - 6i - 9i + 2i^2}{3^2 - i^2} = \dfrac{25 - 15i}{10} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} i = 2{,}5 - 1{,}5i$

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels kartesischer Form an. Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

$$1)\left(1-2i\right)^3\cdot\left[\left(3-i\right)\cdot\left(2i+6\right)\cdot i\right]$$

$$2)\,\frac{3+2i}{4-i}+\frac{-12-3i}{2i-3}$$

$$3)\left(2+3i\right)^2\cdot 2\left(1-2i\right)^2\cdot i^{13}$$

MATHEMATIK

18.11.2013

WIEDERHOLUNG

Durch die Definition der ________ Zahlen wird die bisherigen Zahlen durch eine _________Achse ergänzt. Dies bedeutet, dass eine komplexe Zahl aus einem ____- und einem ___________besteht.
Aufgrund des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks kann zum einen der _______der komplexen Zahl mittels Pythagorassatz und zum anderen das ________– sprich der Winkel – durch den ________________berechnet werden.

Dadurch sind drei verschiedene Darstellungsformen möglich:

- _____________
- trigonometrisch
- ______________

Innerhalb der _________Berechnungen kann das „i“ auch als normale Variable mit der ________Variable=Wurzel(-1) behandelt werden. Steht beim dem Imaginärteil eine _____im Exponenten, so kann eine Vereinfachung mittels der _________Berechnung erfolgen.
Für die ________zweier komplexer Zahlen muss stets der Nenner mit dem ________erweitert werden.
Der zweite Teil des Binoms wird auch als ________komplexe Zahl bezeichnet.
Das ________Dreieck nutzt man, sobald eine komplexe Zahl hoch _____zwei genommen wird.

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels kartesischer Form an. Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

$$1)\;(2i)^3 \cdot \left[\left(3i^{15} - 2i^{26}\right) - \left((-2i)^6 + 7i^{11}\right) + i^2 \cdot \left(5i^{10} - 9i^{31}\right)\right]$$

$$2)\;5i \cdot \left[(2-4i)\cdot(1-3i)^2 \cdot (1+2i)\right]$$

$$3)\;2i^5 \cdot \left[(2i+3)^3 \cdot \left(i^2 - 2i\right)^2\right]$$

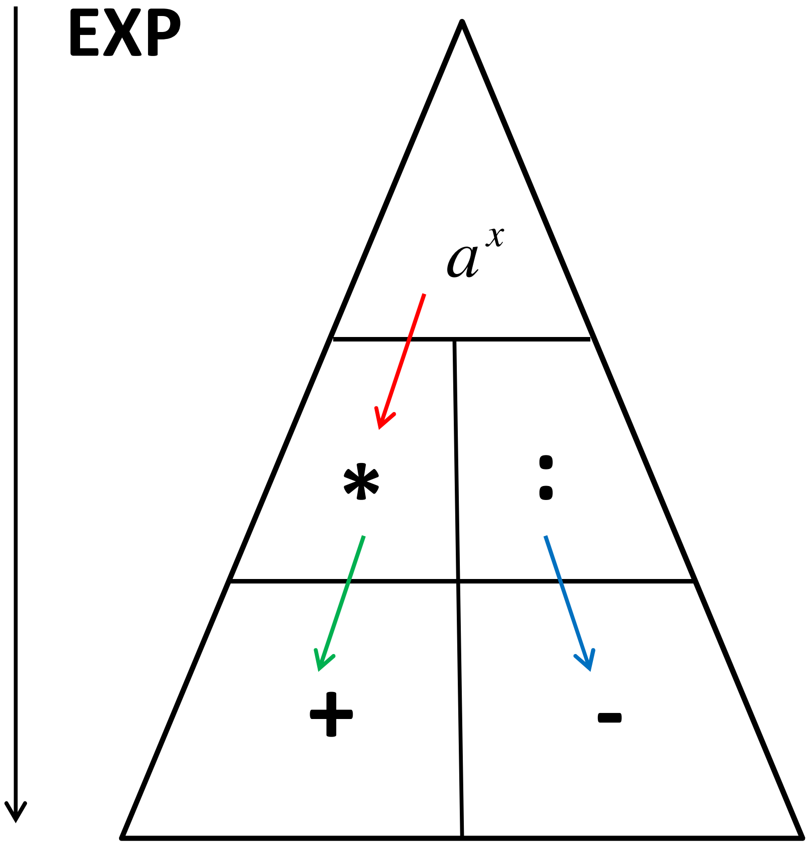
$$4)\;\left[\frac{2-5i}{1-2i} + \frac{3+2i}{7i-4}\right] \cdot (5i-15)$$

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben und Übungen zu den komplexen Zahlen.
- ✓ Wie funktioniert das Pascal‘sche Dreieck?
- ✓ Wann sprechen wir von einem Potenzausdruck?
- ✓ Was verstehen wir unter der Schreiber‘schen Pyramide?
- ✓ Was ist ein Polynom vom Grade n?
- ✓ Was passiert bei einem negativen Exponenten?
- ✓ Wie kann der Grad einer Wurzel dargestellt werden?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

POTENZGESETZE



$$\left(x^3\right)^4 = x^{3\cdot 4} = x^{12}$$

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

$$\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$$

EIGENSCHAFTEN VON POTENZEN

Wichtige Zusammenhänge für die Potenzberechnung mit rationalem Exponenten:

<u>Polynom:</u>
Der höchste natürliche Exponent bestimmt den Grad des Polynoms $x^n + a \cdot x^{n-1} + \ldots + z \cdot x^0$

Beispiel: $x^5 - 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 12$ *Polynom vom Grade 5*

<u>Wurzel:</u>
Der Grad einer Wurzel steht immer im Nenner des Exponenten $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Beispiel: $\sqrt[3]{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

<u>Brüche:</u>
Ein negativer Exponent wird durch einen Positionswechsel positiv $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Beispiel: $\left(\frac{2}{x^2}\right)^{-2} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$

AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

1) $\sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^6 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$

2) $\dfrac{(8u^2v^{-2}w)^4}{(81r^{-3}s^{-2}t^3)^2} : \dfrac{(3^4r^{-3}s^4t^3)^{-2}}{(2^4u^3v^{-4}w^{-2})^{-3}}$

3) $\dfrac{\sqrt[k]{a^{2-k}}}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{3k+4}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt[k]{a}}{\left(\sqrt[k]{a^2}\right)^{k+3}}\right)^{-2}$

4) $\sqrt{\dfrac{y^{-2} \cdot \left(x \cdot z^3\right)^5}{x^{-3} \cdot y^4 \cdot z^7}}$

5) $\dfrac{(5ab^{-3}c^2)^3}{(2^{-3}x^2y^0)^{-2}} : \dfrac{(4^{-1}a^{-2}b^0c^3)^2}{(25xy^{-3})^{-2}}$

6) $\left[\dfrac{\sqrt[2x]{n^{3x-2}}}{\sqrt[2x]{n^{4x-4}}} \cdot \left(\sqrt[2x]{n}\right)^{5x-2}\right]^3$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{x^3} = 125$

b) $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^2 = 1024$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{16}{x^2}} = 0{,}25$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9}$

II) $g(x) = 5 \cdot \left(2x - 8\right)^{-2}$

III) $h(x) = \left(x^2 - 4\right)^2$

MATHEMATIK

25.11.2013

WIEDERHOLUNG

Ein sogenannter Potenzausdruck liegt dann vor, wenn die ______ in der Basis steht.
Um Potenzen zu _____________, muss man die Exponenten addieren.
Steht im Exponent ein ______, so steht der ______für den Grad der Wurzel und handelt es sich im Exponenten um einen ______Ausdruck, so wird dieser positiv, in dem man einen Wechsel vom ______in den ________oder umgekehrt vornimmt.
Will man Potenzterme vereinfachen, so wandelt man diesen im ersten Schritt in einen reinen _______________ um und fasst diesen mittels der ___________zusammen.

NEU (noch nicht besprochen!):
Durch eine Gegenoperation wird immer ein _______ ______erzeugt. Dieses ist im Bereich der Potenzrechnung im ________die Eins.
Der Definitionsbereich eines Terms wird immer auf der ______abgetragen. Es ist darauf zu achten, dass man nicht gegen ein ________der Mathematik verstößt:

- Nicht durch ____ ________.
- Keine ______ ________ziehen
- Der Logarithmus existiert nur für Zahlen ____ ________.

Der _________ist immer die y-Achse. Diesen erhält man, in dem man den Term an den _____________ des Definitionsbereichs untersucht.

AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

1) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4 \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a}} \cdot a^2}$

2) $\dfrac{3(2x^{-2}y^{-3})^2}{4(3a^3b^{-2})^3} \cdot \dfrac{8(3a^4b^{-3})^2}{9(2x^{-1}y^{-2})^3}$

3) $\dfrac{\dfrac{42}{\sqrt[n]{x^{10}}}}{\dfrac{\sqrt[2n]{x^{4n-6}}}{\left(\sqrt[n]{x^2}\right)^{3-2n}}} : \left(\dfrac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{2n+5}}{\sqrt[\frac{n}{2}]{x^{6-n}}}\right)^{-2}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\left(\sqrt[12]{x^6}\right)^3 = 64$

b) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-4} = \dfrac{16}{81}$

c) $\sqrt{\sqrt[5]{x^4}} = \left(\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^2$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{x-2}}$

II) $g(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 7x + 12\right)^{-5}$

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wie wenden wir Operation und Gegenoperation sinnvoll an?
- ✓ Wie sehen die Graphen einfacher Potenzfunktionen aus?
- ✓ Was verstehen wir unter dem Definitions- bzw. Wertebereich?
- ✓ Wofür benötigt man den Logarithmus?
- ✓ Welche Arten von Logarithmen existieren (Definition)?
- ✓ Gesetze der Logarithmen-Rechnung.
- ✓ Wie kann man durch den Logarithmus auf die Basis schließen?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

OPERATION / GEGENOPERATION

Im Bereich der Arithmetik wird durch Bildung der abhängigen Gegenoperation stets das neutrale Element erzeugt (Multiplikation: 1 und Addition: 0).

<u>Lineare Gleichung:</u>
Mittels einfacher Gegenoperationen und den zugehörigen neutralen Elementen wird eine Gleichung nach der Unbekannten freigestellt.

Beispiel: $3 \cdot x - 5 = 4 \Leftrightarrow 3 \cdot x - 5 + 5 = 4 + 5 \Leftrightarrow 3 \cdot x + 0 = 9 \qquad | + 5$

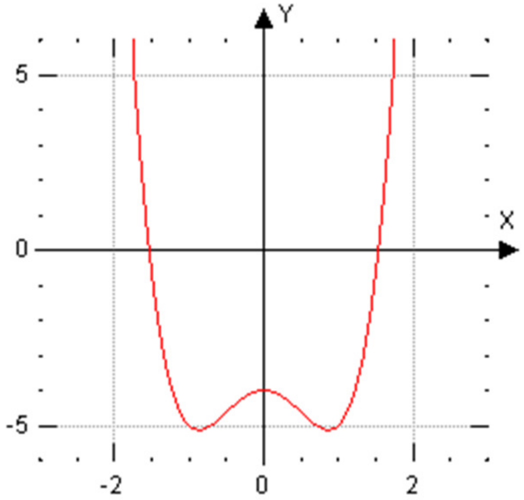
$$3 \cdot x + 0 = 9 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + 0 = 9 \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot x + 0 = 3 \Leftrightarrow x = 3 \qquad | : 3$$

<u>Potenzgleichung:</u>
Nach Überführung des Terms in einen reinen Potenzausdruck wird der Exponent mittels elementarer Umformungen zum neutralen Element 1 umgewandelt.

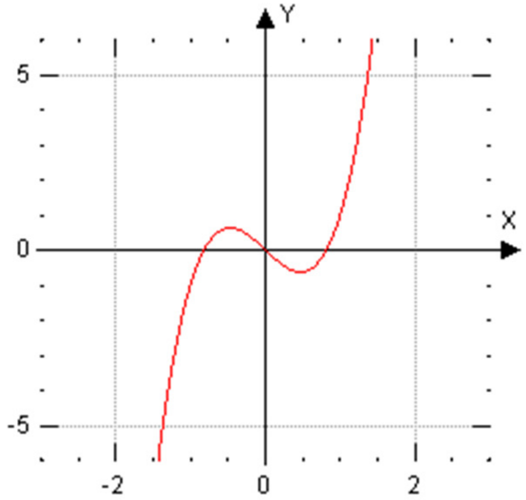
Beispiel: $\sqrt[3]{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow x^1 = \sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$

FUNKTIONSGRAPHEN I

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4$$



$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

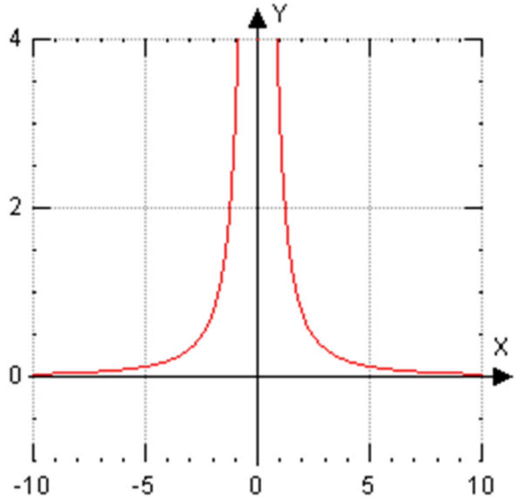


- Achsensymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 4)

- Punktsymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 3)

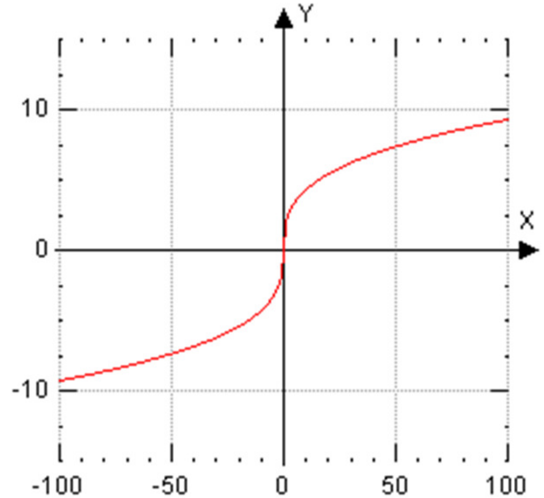
FUNKTIONSGRAPHEN II

$$f(x) = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$$



- Achsensymmetrie
- Hyperbelfunktion

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{x}$$



- Punktsymmetrie
- Wurzelfunktion

DEFINTIONS-/ WERTEBEREICH

Definitionsbereich:
Alle Zahlen, die in einem Ausdruck/ Term **eingesetzt** werden dürfen, werden mittels Mengeneigenschaften in Abhängigkeit der zugehörigen Variablen beschrieben.

- Ein **Polynom** vom Grade n ist stets für alle reellen Zahlen definiert.
- Eine **Wurzel** darf nun aus positiven Termen inkl. der NULL gezogen werden.
- Bei **Brüchen** ist darauf zu achten, dass der Nenner nicht NULL wird.

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{2-x}; D = \{x \in \Re \mid x \leq 2\}$ $\quad g(x) = \frac{x}{x+3}; D = \Re \setminus \{-3\}$

Wertebereich:
Die Zahlen, die durch einen Ausdruck/ Term berechnet werden können, ergeben den Wertebereich einer Funktion (y-Achse).

- Mit **geradem** Exponenten können nicht alle reellen Zahlen abgebildet werden.
- Mit **ungeradem** Exponenten werden alle reellen Zahlen erreicht.
- Bei **Brüchen/ Wurzeln** muss auf Ausnahmen geachtet werden (Definitionsbereich).

Beispiel: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2; W = \{y \in \Re \mid y \geq 2\}$ $\quad g(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}; W = \Re \setminus \{0\}$

AUFGABEN ZU POTENZEN

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\left(\sqrt[12]{x^6}\right)^3 = 64$

b) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-4} = \frac{16}{81}$

c) $\sqrt{\sqrt[5]{x^4}} = \left(\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^2$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{x-2}}$

II) $g(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 7x + 12\right)^{-5}$

DEFINITION EINES LOGARITHMUS

Der Logarithmus dient zur Berechnung eines variablen Ausdrucks im Exponenten.

Es gilt: $$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}}$$

<u>10er-Logarithmus:</u>
Ein Logarithmus ohne Angabe einer Basis ist immer zur Basis 10. $\log x = \log_{10} x$

Beispiel: $\log 10.000 = \log_{10} 10^4 = 4$

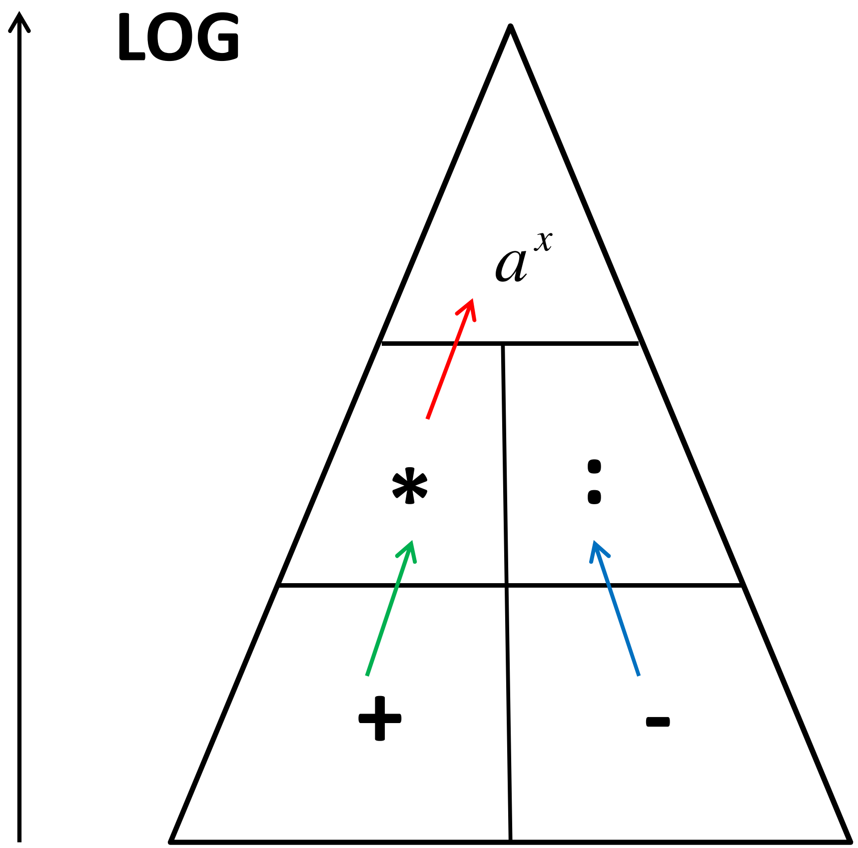
<u>Logarithmus naturalis:</u>
Der Logarithmus zur Basis *e* ist der natürliche Logarithmus. $\ln x = \log_e x$

Beispiel: $\ln 42 = \log_e 42 = 3{,}737$

<u>Logarithmus dualis:</u>
Ein Logarithmus zur Basis 2 nennt man dualis. $ld(x) = \log_2 x$

Beispiel: $ld(32) = \log_2 2^5 = 5$

LOGARITHMUS-GESETZE



$$3 \cdot \log 4 = \log 4^3 = \log 64$$

$$\log 2 + \log 3 = \log 2 \cdot 3 = \log 6$$

$$\log 8 - \log 2 = \log \frac{8}{2} = \log 4$$

OPERATION UND GEGENOPERATION

Die zu einem Logarithmusausdruck zugehörige Gegenoperation ist stets ein Exponentialoperator, wodurch sich beide neutralisieren.
Die Zusammenhänge ergeben sich wie folgt:

$$\boxed{\log 10^{\Psi} = 10^{\log \Psi} = \Psi} \quad \boxed{\ln e^{\Omega} = e^{\ln \Omega} = \Omega} \quad \boxed{ld\, 2^{\Theta} = 2^{ld\Theta} = \Theta}$$

Aufgrund dieser Vereinfachungen, muss die zugehörige Basis bzw. der Exponent im ersten Schritt mittels exponentieller/ logarithmischer Gesetze passend umgeformt werden.

Beispiel:

$$\log\frac{1}{1000} - 4\cdot\ln\sqrt{e} + \frac{1}{2}\cdot ld16 + 0{,}1^{\log 0,25} + \left(\frac{1}{e^2}\right)^{\ln\frac{1}{3}} - 8^{ld3}$$

$$\log 10^{-3} - 4\cdot\ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot ld\,2^4 + 10^{(-1)\cdot\log\frac{1}{4}} + e^{(-2)\cdot\ln\frac{1}{3}} - 2^{3\cdot ld3}$$

$$-3 - 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 3^3 = -3 - 2 + 2 + 4 + 9 - 27 = -17$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $3\cdot\log(x-y)+\log(x+y)-\frac{1}{2}\log(x-y)^4$

2) $2\ln 2x-3\ln 2+4\ln\sqrt{x}+2\ln\frac{4}{x^2}$

3) $\log\sqrt[5]{\frac{x^3\cdot y^2}{3\cdot(x+y^2)}}$

4) $\ln\left(\frac{2\cdot\sqrt{a-2b}}{c^2\cdot\sqrt[4]{d}}\right)^3$

5) $16^{ld\sqrt{3}}+1.000^{\log 3}-\sqrt[4]{e}^{2\ln 25}-2\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\log\frac{1}{100}+3ld\frac{1}{8}$

6) $\left(e^4\right)^{\ln 2}+0{,}1ld1024-\log\sqrt{10.000}+0{,}01^{\log\frac{1}{3}}-\left(\frac{2}{16}\right)^{-ld3}+6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

MATHEMATIK

29.11.2013

WIEDERHOLUNG

Steht die Variable im Exponenten, so handelt es sich um eine ____________. Möchte man nun nach dem Ausdruck im Exponenten auflösen, so nutzt man den ____________.
Je nachdem wie die vorhandene ________definiert ist unterscheidet man:

- LD: ____________ (Basis ist zwei)
- LN: Logarithmus naturalis (____________)
- ___: 10er Logaithmus

Wenn eine andere Basis vorhanden ist, so nutzt man den ____________und setzt die benötigte Basis direkt ein.
Die Gesetze der ____________kann man aus der Hierarchie-Pyramide nach Schreiber entwickeln. Dabei ist darauf zu achten, dass man sich von ____________bewegt.
Wenn z.B. ein Produkt aus Zahl und Logarithmus vorhanden ist, so wandert der ________vor dem Logarithmus in den __________des Terms der hinter dem Logarithmus steht.
Treffen bei einem Term der ____________und die zugehörige Exponentialfunktion mit gleicher _______aufeinander, so eliminieren sich die Operation und Gegenoperation.
Diese Tatsache nutzt man, in dem man die ________konvertiert. Dies geschieht im Wesentlichen dadurch, in dem Sie zuerst ____________und danach die Logarithmengesetze anwenden.

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $$\log\frac{1}{100}-\sqrt{e}^{\ln 4}+4^{ld\,3}-2ld\,0{,}25$$

2) $$100^{\log 3}-\ln\frac{1}{e^2}+0{,}5ld16-e^{-3\ln\frac{1}{2}}$$

3) $$\left(\frac{1}{8}\right)^{ld\,2}-6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}+\frac{1}{4}ld64-\frac{1}{2}\log\frac{1}{1000}+\sqrt[3]{e}^{\ln 27}$$

4) $$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\ln\frac{1}{9}}+100^{\log\frac{1}{2^{-2}}}-16^{\frac{1}{2}ld\,4}+2\log 0{,}001-3\ln\frac{1}{e^3}+\frac{1}{4}ld\frac{1}{256}$$

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wie lösen wir eine Logarithmengleichung?
- ✓ Wie nutzen wir das Operations- / Gegenoperationsverfahren?
- ✓ Welche Eigenschaften hat eine Logarithmusfunktion?
- ✓ Welche Bedeutung hat die Umkehrfunktion für den Logarithmus?
- ✓ Wie bestimmt man den Definitions- bzw. Wertebereich?
- ✓ Welche Verfahren existieren für eine quadratische Gleichung?
- ✓ Was verstehen wir unter einer Parabel?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $\frac{1}{4}\cdot\log(256x^8)-2\log\frac{\sqrt{9}}{x^2}-0{,}5\cdot\log\frac{x^4}{9}=1{,}5\cdot\log(9x^4)+3\cdot\log\frac{1}{2x^3}+4\cdot\log\sqrt{27\cdot x}$

2) $6\cdot\ln\sqrt[3]{3}-4\cdot\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{x}}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{9}{x}\right)=2\cdot\ln\frac{\sqrt{x^3}}{3}-0{,}25\cdot\ln(16x^8)+3\cdot\ln\frac{8}{x^2}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2-6\cdot x-40\right)$

4) $g(x)=\log\left(\sqrt{2x+4}-8\right)-12$

5) $h(x)=\frac{3\cdot x}{\ln\left(15-3\cdot x\right)}$

DIE LOGARITHMEN-GLEICHUNG

Sofern eine reine Logarithmengleichung existiert kann man diese mit der folgenden Methodik lösen, wobei primäres Ziel eine Isolierung des Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung ist:

<u>Methodik:</u>

1. Die Faktoren vor dem Logarithmus in den Exponenten verschieben.
2. Alle positiven Terme über den Bruchstrich, alle negativen darunter schreiben.
3. Streichen der Logarithmen auf beiden Seiten.
4. Lösen der Gleichung.

Beispiel: $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log 2 - \frac{1}{2} \cdot \log x^4 = 2 \cdot \log 4 - \log(x-2)$

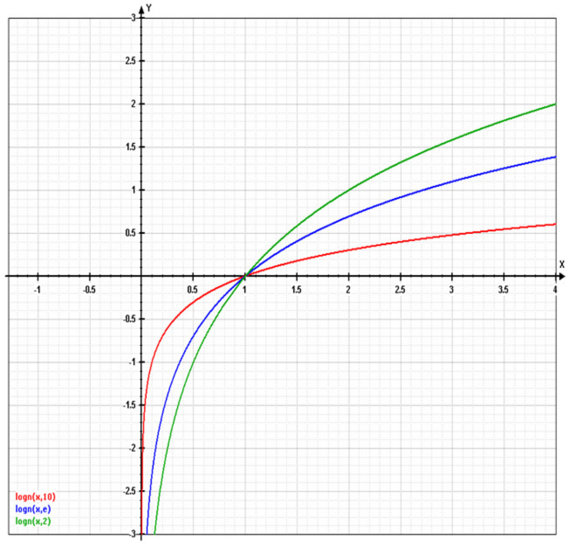
$$\log x^2 - \log 2^3 - \log\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}} = \log 4^2 - \log(x-2)$$

$$\log \frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \log \frac{16}{x-2}$$

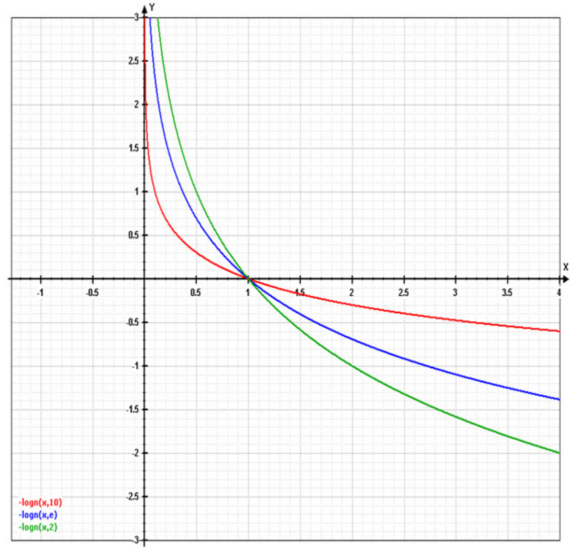
$$\frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \frac{16}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = 16 \cdot 8 = 128 \Leftrightarrow x = 130$$

FUNKTIONSGRAPHEN

Positiver Logarithmus:



Negativer Logarithmus:



- Ausschließlich positive Steigung
- Ausschließlich negative Steigung

- Gemeinsamer Punkt: (1/0)
- Je größer die Basis, desto flacher ab x=1
- Je größer die Basis, desto steiler vor x=1

DEFINITIONS-/ WERTEBEREICH

Definitionsbereich:
Wie man schon durch die Funktionsgraphen erkennen kann, darf man einen Logarithmus nur von positiven Zahlen ziehen.

$D=\{x\in\Re \mid x>0\}=\Re^{+}$, da $10^{x}>0 \Leftrightarrow \log(>0)=x$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned}&\ln\left(x^{2}-5x+6\right)=y\\&\left(x^{2}-5x+6\right)=(x-3)\cdot(x-2)>0\end{aligned}\right\}\quad D=\{x\in\Re \mid x>3 \vee x<2\}$$

Wertebereich:
Aufgrund der Funktionsgraphen ist ersichtlich, dass ein Logarithmus alle reellen Werte annehmen kann.

$W=y\in\Re$, da $10^{(>0)}>1 \wedge 10^{(\leq 0)}\leq 1$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned}&12-3\cdot\ln(5x-3)=y\\&12-3\cdot\left]-\infty;\infty\right[\Rightarrow\Re\end{aligned}\right\}\quad W=y\in\Re$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3\cdot\log x-4\cdot\log\frac{2}{x}-\frac{1}{3}\cdot\log\left(x^2\right)^6=\frac{2}{3}\cdot\log 27+\frac{1}{2}\cdot\log x^4-2\cdot\log 6$

2) $3\cdot\ln 4-0{,}5\cdot\ln\frac{16}{x^4}+2\cdot\ln 8=1{,}5\cdot\ln x^4-8\cdot\ln\sqrt[4]{\frac{1}{x}}-2\cdot\ln\frac{1}{4}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x)=\frac{2}{5}\cdot\ln\left(4x-3-x^2\right)$ 4) $g(x)=42+\log\left(2-\sqrt{x-2}\right)$ 5) $h(x)=\frac{42}{ld(3\cdot x+6)}$

III. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $\log\frac{1}{1000}-4\ln\sqrt{e}+16^{ld\sqrt{3}}+2e^{2\cdot\ln 3}-\left(10^{\log 12}+2ld4\right)$

2) $6\cdot\log\sqrt[3]{10}+4^{ld3}-2\cdot\ln\frac{1}{e^2}-0{,}2\cdot ld\left(32^5\right)+\left(\frac{1}{100}\right)^{\log\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{e}\right)^{\ln\left(5^4\right)}$

QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine quadratische Gleichung/ Funktion stellt graphisch gesehen immer eine **Parabel** dar $x^2 + p \cdot x + q = 0$.
Um eine quadratische Gleichung lösen zu können, bringt man diese auf die sogenannte **Nullform**.
Die Lösungen dieser Gleichung (**Schnittpunkte mit der x-Achse**) erhält man durch die folgenden Lösungsverfahren:

✓Quadratische Ergänzung: $(x+a)^2 + b = 0 \Rightarrow S(-a;b)$

✓p-q-Formel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

✓Satz von Vieta: $x^2 + p \cdot x + q = (x+a) \cdot (x+b) = 0$

P-Q-FORMEL

Um die p-q-Formel zu beweisen, nutzt man das Verfahren der quadratischen Ergänzung auf die allgemeine quadratische Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Es ist darauf zu achten, dass zum einen durch **elementare Umformungen** die **NULL-Form** der Gleichung entsteht und zum anderen **kein Faktor** vor dem x^2 auftauchen darf.

Beweis: $x^2 + p \cdot x + q = 0$

Wurzel *Halbierung* *Subraktion des Quadrats*

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \qquad \mid + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \mid \sqrt{} ; \mid -\frac{p}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Aufgabe: Entwickeln Sie die Mitternachtsformel basierend auf $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

BEISPIELE

$$2 \cdot x^2 + 8 \cdot x = -6 \Leftrightarrow x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0 \qquad | +6; | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4 \cdot x + 3 = (x+2)^2 - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 1 = 0 \\ (x+2)^2 = 1 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{quadratische Ergänzung}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0; p = 4 \wedge q = 3 \\ x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} = -2 \pm 1 \\ x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{p-q-Formel}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4 \cdot x + 3 = x^2 + (3+1) \cdot x + (3 \cdot 1) = 0 \\ (x+3) \cdot (x+1) = 0 \\ x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{Satz von Vieta}$$

DIE PARABEL

Bei einer Parabel handelt es sich um die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion. Die relevanten Punkte bzw. der Verlauf kann bereits im Vorfeld näher bestimmt werden.

Allgemeine Form: $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$

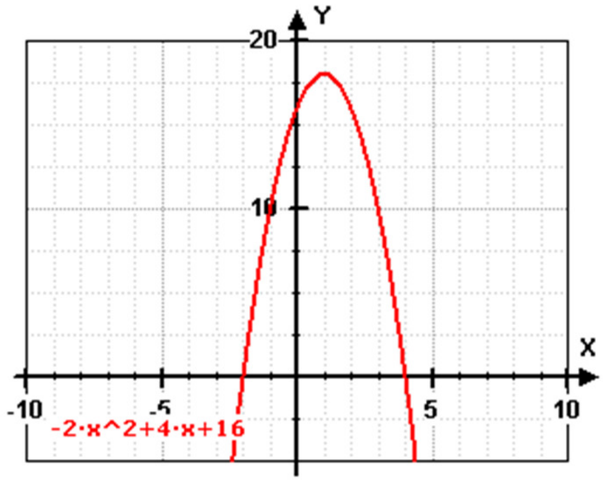
✓Verlauf: gestreckt $|\alpha| > 1$ bzw. gestaucht $|\alpha| < 1$
nach oben geöffnet $\alpha > 0$ bzw. nach unten $\alpha < 0$

✓Achsenschnittpunkte: y-Achse: $S_y(0/\gamma)$ bzw. x-Achse: $f(x) = 0$ (p-q-Formel)

✓Scheitelpunkt: Scheitelpunktform: $f(x) = \alpha \cdot (x + a)^2 + b \Rightarrow S(-a;b)$
Tiefpunkt $\alpha > 0$ bzw. Hochpunkt $\alpha < 0$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \gamma$
Sonst Symmetrie zur parallelen zum Scheitelpunkt

BEISPIEL



Funktionsgleichung:

$f(x) = -2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 16$

✓Verlauf: gestreckt, da $|\alpha| = |-2| > 1$
nach unten geöffnet, da $\alpha = -2 < 0$

✓Schnittpunkte: $S_y(0;16)$

$S_x : 0 = x^2 - 2 \cdot x - 8 = (x-4) \cdot (x+2) \quad S_{x_1}(-2;0); S_{x_2}(4;0)$

✓Scheitelpunkt: $f(x) = -2 \cdot \left((x-1)^2 - 1^2 - 8\right) = -2 \cdot (x-1)^2 + 18$
Scheitelpunkt (Hochpunkt): $S(1;18)$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie zur Parallelen durch $x = 1$

BI-QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine **Bi-Quadratische Gleichung** $x^n + p \cdot x^{\frac{n}{2}} + q = 0$ ist dann vorhanden, wenn zwei Exponenten im Verhältnis 1:2 stehen und eine weitere Konstante existiert.

Nach der **Substitution** der Variablen stehen die bekannten Lösungsverfahren zur Verfügung und man erhält nach **Resubstitution** die Lösungsmenge.

Beispiel: $x^4 - 17 \cdot x^2 + 16 = 0$

Substitution:

$$z = x^2$$

$$z^2 - 17 \cdot z + 16 = (z - 16) \cdot (z - 1) = 0$$

$$z_1 = 16 \vee z_2 = 1$$

Resubstitution:

$$x = \pm\sqrt{z}$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \vee x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

Wenden Sie je ein Verfahren an

1) $3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 24 = 0$

2) $-0{,}5 \cdot x^2 + 2 \cdot x = -2{,}5$

3) $x \cdot (2 \cdot x - 20) = -32$

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x - 3$

5) $g(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3$

6) $h(x) = 100 - 4 \cdot x^2$

- ✓Verlauf
- ✓Achsenschnittpunkte
- ✓Scheitelpunkt
- ✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Bi-Quadratischen Gleichungen.

7) $x^4 + 100 = 29 \cdot x^2$

8) $x^6 = 7 \cdot x^3 + 8$

MATHEMATIK

02.12.2013

WIEDERHOLUNG

Handelt es sich um eine Logarithmengleichung, so muss man im ersten Schritt den __________________bestimmen.
Es ist dabei darauf zu achten, dass der Ausdruck hinter dem Logarithmus immer ___________ sein muss.
Bei der Lösung der Gleichung bringen Sie zuerst die ___________vor dem Logarithmus weg, fassen dann die Logarithmenterme zusammen und ___________zum Schluss mittels der zugehörigen Gegenoperation den Logarithmus.
Sollte in der Gleichung ein Ausdruck ohne Logarithmus vorhanden sein, so müssen wir auf einer Seite der Gleichung alle ______________stehen haben und auf der anderen Seite alles ohne ___________.
Eine Logarithmenfunktion kann durch ein Minus ___________LOG an der x-Achse gespiegelt werden. Durch Negierung des Terms ___________dem Logarithmus wird die Funktion an der y-Achse gespiegelt.

Eine quadratische Funktion ist grafisch gesehen immer eine ___________und kann im Vorfeld bereits anhand des Verlaufs, der ___________mit den Achsen und der Symmetrie beschrieben werden.
Jede Parabel ist immer zur ___________zur y-Achse, die durch den Scheitelpunkt verläuft, symmetrisch. Ist der Faktor vor dem ___________, so ist die Parabel nach unten geöffnet und der Scheitelpunkt stellt einen ___________dar.
Zur Lösung einer quadratischen Gleichung nutzen wir eins der folgenden Verfahren:

- _________________
- Satz von Vieta x^2
- ____________________

Eine ___________Gleichung kann mittels Substitution und anschließender ___________zu einer reinen quadratischen Gleichung umgewandelt werden.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Warum sind Ungleichungen gefährlich?
- ✓ (FREPL)-Methodik für Ungleichungen.
- ✓ Wofür ist eine Fallunterscheidung gut.
- ✓ Was versteht man unter einer Betragsfunktion.
- ✓ Vorgehensmethodik bei Bruchungleichungen
- ✓ Ungleichungen eines Polynom vom Grade >1.
- ✓ Wie sehen Ungleichungen grafisch aus?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $2 \cdot x^2 - 8 \cdot x = 10$

2) $3 \cdot x^2 = 9 \cdot x - 30$

3) $\frac{1}{4} \cdot x^2 + 3 \cdot x + 8 = 0$

Wenden Sie je ein Verfahren an

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 18$

5) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 10 \cdot x + 32$

✓Verlauf
✓Scheitelpunkt
✓Achsenschnittpunkte
✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Bi-Quadratischen Gleichungen.

7) $x^4 - 24 \cdot x^2 = 25$

8) $x^8 + 16 = 17 \cdot x^4$

(FREPL)-METHODIK

Beim Lösen einer beliebigen Gleichung kann abgesehen von der Fallunterscheidung (F) stets mit folgender Methodik gearbeitet werden:

- ✓ **F**allunterscheidung:
  Je nach Aufgabenstellung muss definiert werden, für welchen Bereich die Betrachtung gilt.
- ✓ **R**echnung:
  Die zugrundeliegende Gleichung wird mittels elementarer Umformungen gelöst.
- ✓ **E**rgebnis:
  Durch die Berechnungen ergeben sich eine oder auch mehrere Ergebnisse.
- ✓ **P**robe:
  Mittels Probe bzw. Abgleich mit dem Definitionsbereich wird der Ergebnisraum untersucht.
- ✓ **L**ösung:
  Aufgrund er Probe kann nun die Lösungsmenge angegeben werden.

BETRAGSFUNKTION I

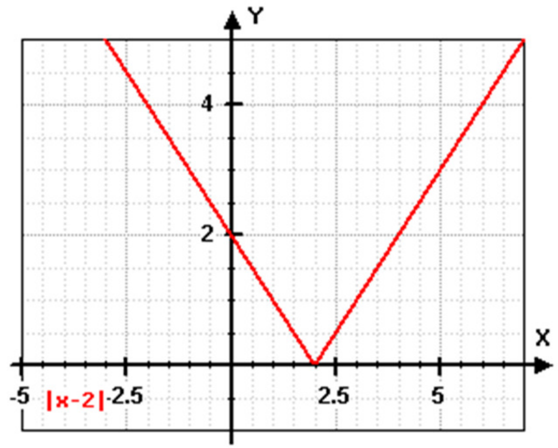
Da es sich bei dem Betrag einer Zahl um die reine **positive** Darstellung handelt, wird sie graphisch als sogenannte **V-Funktion** dargestellt.
Die Betragsstriche können weggelassen werden, in dem man den negativen Bereich mit einem **zusätzlichen Minus** vor dem Term versieht.

Beispiel:

$$f(x) = |x-2|$$

$x < 2$: $f(x) = -(x-2) = -x+2$

$x \geq 2$: $f(x) = x-2$



Aufgrund der Knickstelle ist die Betragsfunktion an der Schnittstelle mit der X-Achse **nicht differenzierbar**, d.h. es kann keine Steigung berechnet werden.

BETRAGSFUNKTION II

Ungleichungen, die auf einer Betragsfunktion basieren, können auch mittels (FREPL)-Methodik gelöst werden.

<u>Beispiel</u>: $|2x-8|>6$

$x>4 \Rightarrow 2x-8>6$	$x \le 4 \Rightarrow -(2x-8)>6$	Fallunterscheidung
$2x-8>6 \Leftrightarrow 2x>14$ $\Rightarrow x>7$	$-2x+8>6 \Leftrightarrow -2x>-2$ $\Leftrightarrow x<1$	Rechnung
$x>7$	$x<1$	Ergebnis
$x=8 \Rightarrow |2\cdot 8-8|=8>6$	$x=0 \Rightarrow |2\cdot 0-8|=|-8|=8>6$	Probe

$$L=\{x \in R \mid x>7 \vee x<1\}$$ Lösung

Durch Multiplikation / Division mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

AUFGABEN

I. Skizzieren Sie folgende drei Betragsfunktionen

1) $f(x) = \left|\frac{2}{3}x - 2\right|$

2) $g(x) = |x^2 - 7x + 12|$

3) $h(x) = |\cos(x)|$

II. Geben Sie den zugehörigen Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen an.

4) $|3 - x| < 2$

5) $|4x - 12| > 8$

BRUCHUNGLEICHUNGEN

Ungleichungen, die auf einem **Bruch** basieren, können ebenfalls mittels „**FREPL**“ gelöst werden. Da für gewöhnlich im ersten Rechenschritt mit dem **Nenner multipliziert** wird, muss an dieser Stelle die **Fallunterscheidung** genutzt werden, um die Multiplikation mit einem negativen Ausdruck mathematisch korrekt darstellen zu können.

Beispiel: $\frac{3x-2}{x-3} > 2 \quad | \cdot (x-3)$ Umkehrung des Ungleichheitszeichen

$x > 3 \Rightarrow 3x-2 > 2 \cdot (x-3)$	$x < 3 \Rightarrow 3x-2 < 2 \cdot (x-3)$	Fallunterscheidung
$3x-2 > 2x-6$ $\Leftrightarrow x > -4$	$3x-2 < 2x-6$ $\Leftrightarrow x < -4$	Rechnung
$x > 3$	$x < -4$	Ergebnis
$x = 4 \Rightarrow \frac{3 \cdot 4 - 2}{4-3} = \frac{10}{1} > 2$	$x = -5 \Rightarrow \frac{3 \cdot (-5) - 2}{(-5)-3} = \frac{-17}{-8} > 2$	Probe

$$L = \{x \in R \mid x > 3 \vee x < -4\}$$ Lösung

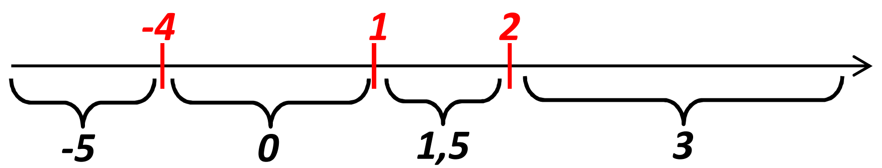
POLYNOMUNGLEICHUNGEN

Handelt es sich um ein Polynom vom Grade >1, so werden im ersten Schritt die Nullstellen der Gleichung bestimmt. Diese gefundenen Ergebnisse repräsentieren die Intervallgrenzen der Ungleichung, wodurch mittels Probe einer Zahl aus dem Intervall die Lösungsmenge bestimmt werden kann (REPL-Methodik).

<u>Beispiel</u>: $x^3 + x^2 - 10x + 8 > 0$ *Polynomdivision liefert:*

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+4) > 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -4$$

Rechnung



Ergebnis

$$x = -5: (-5-1)\cdot(-5-2)\cdot(-5+4) < 0 \quad \Rightarrow \textit{falsch}$$

$$x = 0: (0-1)\cdot(0-2)\cdot(0+4) > 0 \quad \Rightarrow \textit{richtig}$$

$$x = 1{,}5: (1{,}5-1)\cdot(1{,}5-2)\cdot(1{,}5+4) < 0 \quad \Rightarrow \textit{falsch}$$

$$x = 3: (3-1)\cdot(3-2)\cdot(3+4) > 0 \quad \Rightarrow \textit{richtig}$$

Probe

$$L = \{x \in R \mid (x > -4 \wedge x < 1) \vee x > 2\}$$

Lösung

AUFGABEN

I. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben die Lösungsmenge an.

1) $\dfrac{2x-5}{4-2x} > \dfrac{1}{2}$

2) $\dfrac{2x+1}{1+x} \geq 3$

3) $\dfrac{x \cdot (3+2x)}{6-2x} > 1-x$

4) $x^2 - 8x > 20$

5) $x^3 + x + 6 > 4x^2$

6) $x^4 - x^2 \leq 25 \cdot (x-1) \cdot (x+1)$

MATHEMATIK

06.12.2013

WIEDERHOLUNG

Wenn wir von einer ______________ sprechen, dann handelt es sich um einen Vergleich von zwei Termen, die über eine größer/ kleiner Beziehung in Verbindung stehen.
Wichtig ist, dass durch ______________oder Division mit einer negativen Zahl das ______________herumdreht.
Im Allgemeinen erzeugen Sie immer zuerst die _________der Ungleichung und lösen anschließend nach x auf.
Grafisch wird dadurch ein Bereich gesucht, in dem die Funktion oberhalb oder unterhalb von der ________ verläuft.
Als allgemeines Lösungsverfahren für Ungleichungen können wir die ______-Methode anwenden.
Diese zerlegt sich in die folgenden Hauptpunkte:

- ______________
- ______________
- ______________
- ______________
- ______________

In der Probe setzen wir eine Zahl aus dem berechneten Intervall ein. Trifft die Behauptung der Ungleichung zu, so ist das Intervall eine _________ anderenfalls scheidet der Bereich aus.
Als besondere Ausdrücke haben wir die ______________und die ______________besprochen.
Da der Betrag einer Zahl immer ___________ist, muss hier eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, um die Betragsstriche im negativen Bereich durch ein ______zu ersetzen.
Da wir bei einer Bruchungleichung mit dem Nenner ______________wollen, müssen wir auch hier den positiven und negativen Fall berücksichtigen, denn es könnte ich ja das ______________umkehren.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was verstehen wir unter einem Grenzwert?
- ✓ Was ist die Epsilon-Umgebung?
- ✓ Einfache Methodik zur Grenzwertbestimmung.
- ✓ Welche speziellen Grenzwerte gibt es (exemplarisch)?
- ✓ Wie funktioniert die Regel von L'Hospital?
- ✓ Wie können uns Linearfaktoren helfen?
- ✓ Was verstehen wir unter dem Dominazprinzip?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

I. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben die Lösungsmenge an.
Skizzieren Sie ferner die Graphen und kennzeichnen Ihre Ergebnisse.

1) $|3x-6| < 12$

2) $\dfrac{2x-5}{4-x} < -3$

3) $x^3 + 2x^2 + 7x < 2x \cdot (5x-4)$

GRENZWERTE I

Wird der Grenzwert (**LIMES**) einer Funktion an eine **definierte Zahl** angenähert und ist das entstehende **Ergebnis** innerhalb einer **kleinstmöglichen Umgebung** konstant, so existiert der Grenzwert und die Funktion **konvergiert** (Gegenteil: divergiert).

Es wird unterschieden, ob man sich der **Unendlichkeit** oder einer **Konstanten** annähert:

- ✓ Unendlichkeit: $\lim\limits_{x \to \infty}(42 + e^{-x}) = [42 + 0] = 42$
- ✓ Konstant: $\lim\limits_{x \to 2}(\ln(x-2)) = -\infty$

$$\lim_{x \to n} f(x) = \alpha$$

Annäherung *Funktion* *Grenzwert*

Je nachdem **von wo** man sich einer Konstanten nähert wird dies durch ein **+/- im Exponenten** der Annäherungszahl dargestellt (*Ladung von Ionen*), gleiches gilt für den erreichten Grenzwert.

- ✓ Vom Positiven (rechts): $\lim\limits_{x \to n^{+}} f(x) = \alpha^{-} \longrightarrow$ *Der Grenzwert wird von* ***unten*** *angesteuert*
- ✓ Vom Negativen (links): $\lim\limits_{x \to n^{-}} f(x) = \alpha^{+} \longrightarrow$ *Der Grenzwert wird von* ***oben*** *angesteuert*

GRENZWERTMETHODIK I

Da es verschiedene Möglichkeiten der Grenzwertbestimmung gibt, ist es wichtig die einfachste (effizienteste) Regel zur Lösung der Aufgabe anzuwenden.

Die im Folgenden beschriebenen Schritte haben sich bewährt:

1. Bekannte Zusammenhänge:

   Ist ein spezieller bzw. bekannter Grenzwert vorhanden?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0 \vee \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1 \vee \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^{\alpha} \vee \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \vee \lim_{x\to\infty}q^x=0;|q|<1$$

2. Faustregel:

   Trifft Unendlichkeit / Null auf eine Konstante?

$$\lim_{x\to\infty}(Ausdruck)=\left[\frac{k}{\infty}\right]=0 \longrightarrow$$ *Konstant durch unendlich ist Null*

$$\lim_{x\to 0}(Ausdruck)=\left[\frac{k}{0}\right]=\infty \longrightarrow$$ *Konstant durch Null ist unendlich*

GRENZWERTMETHODIK II

3. <u>Gebrochen-Rationaler Ausdruck</u>: *Polynom vom Grade m / Polynom vom Grade n*

$x \to \infty$

a) Grad (Zähler/m) > Grad (Nenner/n): $\Rightarrow$ *Grenzwert ist* ***unendlich***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x+5}{5-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\cdot\left(2-\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^4}\right)}{x^2\cdot\left(\frac{5}{x^2}-1\right)}=\left[\frac{2x^2}{-1}\right]=-\infty$$

b) Grad (Zähler/m) < Grad (Nenner/n): $\Rightarrow$ *Grenzwert ist* ***Null***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-25}{x^3-4x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(2-\frac{25}{x}\right)}{x^3\cdot\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}=\left[\frac{2}{x^2}\right]=0$$

c) Grad (Zähler/m) = Grad (Nenner/n): $\Rightarrow$ *Grenzwert ist* ***konstant***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-7x+5}{4-x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(\frac{4}{x^2}-1+\frac{1}{x}\right)}=\left[\frac{2}{-1}\right]=-2$$

Ausklammern des größten Potenzausdrucks

Entstehende Nullfolgen fallen weg!

GRENZWERTMETHODIK III

3. <u>Gebrochen-Rationaler Ausdruck</u>: *Polynom vom Grade m / Polynom vom Grade n*

$x \to k$

d) unabhängig vom Grad des Zählers / Nenners:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-6x-8}{x^2+x-6} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+1)\cdot(x+4)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+3)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)\cdot(x+4)}{(x+3)} = \left[\frac{3\cdot 6}{5}\right] = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

Sollte nicht $\left[\frac{0}{0}\right]$ *als erstes Zwischenergebnis heraus kommen,*

greift die Fausregelformel unter Punkt 2).

Faktorisierung des Polynoms

Kürzen des Linearfaktors

GRENZWERTMETHODIK IV

4. Erweiterung: *Mittels 3.Binom erfolgt die Vereinfachung*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{2\cdot\sqrt{6-x}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{2\cdot\sqrt{6-x}-4}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{6-x}+4}{2\cdot\sqrt{6-x}+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(2\cdot\sqrt{6-x}+4)}{4\cdot(6-x)-16}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot 2\cdot\sqrt{6-x}+4}{-4\cdot\cancel{(x-2)}}=\left[\frac{8}{-4}\right]=-2$$

5. Substitution: *Ersetzung, um auf einen bekannten Ausdruck zu kommen*

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\\[2em]\displaystyle\lim_{\gamma\to 0}\frac{\sin(\gamma)}{\gamma}=1\end{array}\right\}$$

Substitution: $\gamma=\frac{1}{x}: x\to\infty \Leftrightarrow \gamma\to 0$

GRENZWERTMETHODIK V

6. Regel von L'Hospital:

Bei 0/0 geht man ins Krankenhaus

$$\boxed{\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to k}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to k}\frac{[\sin(x)]'}{[x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\left[\frac{1}{1}\right]=1$$

7. Dominanzprinzip:

Undendlich trifft auf Null: Der Stärkere gewinnt

Mittels 1. Ableitung wird die Steigung ermittelt und aufgrund derer Klassifizierung die dominanten Funktion / Ausdruck bestimmt.

$$\infty\cdot 0 \rightarrow \begin{cases} 0: \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\dfrac{1}{e^x}\right)=0 \\ k: \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{x+2}\cdot\dfrac{1}{e^x}\right)=e^2 \\ \infty: \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)=\infty \end{cases}$$

exponentiell Funktion

ist stärker als

Potenzfunktion

AUFGABEN

I. Geben Sie zu den folgenden Aufgaben den Grenzwert an.

1) $$\lim_{x \to (2)} \frac{21x - 42}{\sqrt{0{,}5x - \sqrt{3 - x}}}$$

2) $$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{7x^3 + 2x^2 - x^4}{3x^4 + 1}$$

3) $$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{3 \cdot e^x}{x^2}$$

4) $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x - \sqrt[x]{5}$$

5) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 2x - 8}$$

6) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{2 + \frac{3}{x}}$$

MATHEMATIK

09.12.2013

WIEDERHOLUNG

Bei einem Grenzwert handelt es sich um einen _____________ an einer bestimmten Stelle oder in der Unendlichkeit. Dieser wird dadurch berechnet, dass wir die Funktion an der gegebenen Stelle untersuchen. Sie sollten natürlich den _____________ nur dort berechnen – abgesehen von dem Verlauf im Unendlichen -, wo die Funktion nicht definiert ist. Wir sagen auch, dass wir den Ausdruck hinter dem Limes an den ________des Definitionsbereich betrachten.
Durch ein _________________ im Exponenten kann zum einen gesteuert werden, von wo wir uns einer Zahl nähern (rechts/ links) beziehungsweise von wo wir uns dem _____________ annähern (oben / unten).
Sollte es zu dem Fall Null dividiert durch Null kommen, haben Sie immer drei Möglichkeiten den Grenzwert zu berechnen:

- Sie Faktorisieren soweit als möglich und kürzen dann den _____________ raus.
- Sie erweitern den Bruch mit dem ____________und können dann den Linearfaktor kürzen.
- Sie wenden den Satz von _______________ an, bilden von Zähler und Nenner die erste Ableitung und berechnen dann erneut den Grenzwert.

Durch das sogenannte ________________ wird erklärt, dass die stärkere Funktion immer den Grenzwert festlegt.
Das sieben-Schritte Rezept definiert nicht nur die wesentlichen Rechnungen einer ________________, sondern beschreibt auch die Methode, mit der wir mit ___________________ rationalen Termen umgehen sollten.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was ist eine Näherungsgerade?
- ✓ Wann haben wir eine behebbare Lücke?
- ✓ Wie erhalten wir eine diagonale Asymptote?
- ✓ Wie können wir einen Graphen zeichnen?
- ✓ Was bedeutet eine stetige Funktion?
- ✓ Wie beweist man die Differenzierbarkeit?
- ✓ Wie zeigt man Punkt-/ Achsensymmetrie (Kurvendiskussion)?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

1) $$f(x)=\frac{3x^3-15x^2-3x+15}{-2x^3+12x^2-6x-20}$$

2) $$f(x)=\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$$

II. Geben Sie zu den folgenden Aufgaben den Grenzwert an.

1) $$\lim_{x\to(-4)}\frac{2x+8}{\sqrt{8-2x}-(8+x)}$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x-\frac{3}{\sqrt[x]{9}}+\left(\frac{2\cdot\sin(x)}{4\cdot x}\right)^2$$

3) $$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-2x^2-12x+16}{x^2+x-20}$$ Berechnung auf 2 Arten!

ASYMPTOTEN I

Eine Asymptote ist ein **Näherungsgraph**, an die sich die untersuchte Funktion unendlich nahe **anschmiegt**, d.h. der Abstand zwischen Funktion und Asymptote ist nahezu Null.
Sie werden dadurch berechnet, in dem man die zugehörigen Grenzwerte an den **Rändern des Definitionsbereich** bestimmt.

Es unterscheiden sich aufgrund der Möglichkeiten bei der Grenzwertbetrachtung folgende Arten:

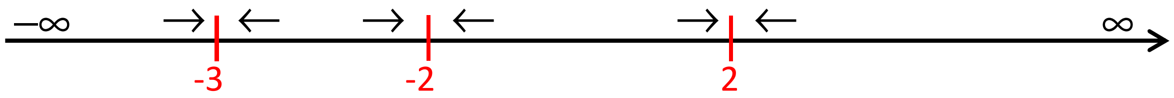
- ✓ Waagerechte Asymptote:
  Im Unendlichen nähert sich die Funktion einem konstanten Wert an. $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$
- ✓ Senkrechte Asymptote:
  Bei Annäherung an eine Konstante verläuft der Graph im Unendlichen. $\lim_{x \to k} f(x) = \infty$
- ✓ Diagonale Asymptote:
  Im Unendlich nähert sich die Funktion der Unendlichkeit an. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- ✓ Behebbare Lücke:
  Bei Annäherung an eine Konstante nähert sich der Graph einer Konstanten. $\lim_{x \to k} f(x) = k$

ASYMPTOTEN II

<u>Beispiel A</u>: $f(x)=\dfrac{2x^3+4x^2-10x-12}{x^3+3x^2-4x-12}\Rightarrow D=R\setminus\{-3;-2;2\}$

$$f(x)=\frac{2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}\Rightarrow f_e(x)=\frac{2\cdot(x+1)}{x+2}$$

Ersatzfunktion



$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f_e(2)=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^-} f(x)=f_e(-3)=4$$

behebbare Lücke

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\left[\frac{-2}{0^+}\right]=-\infty \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x)=\left[\frac{-2}{0^-}\right]=\infty$$

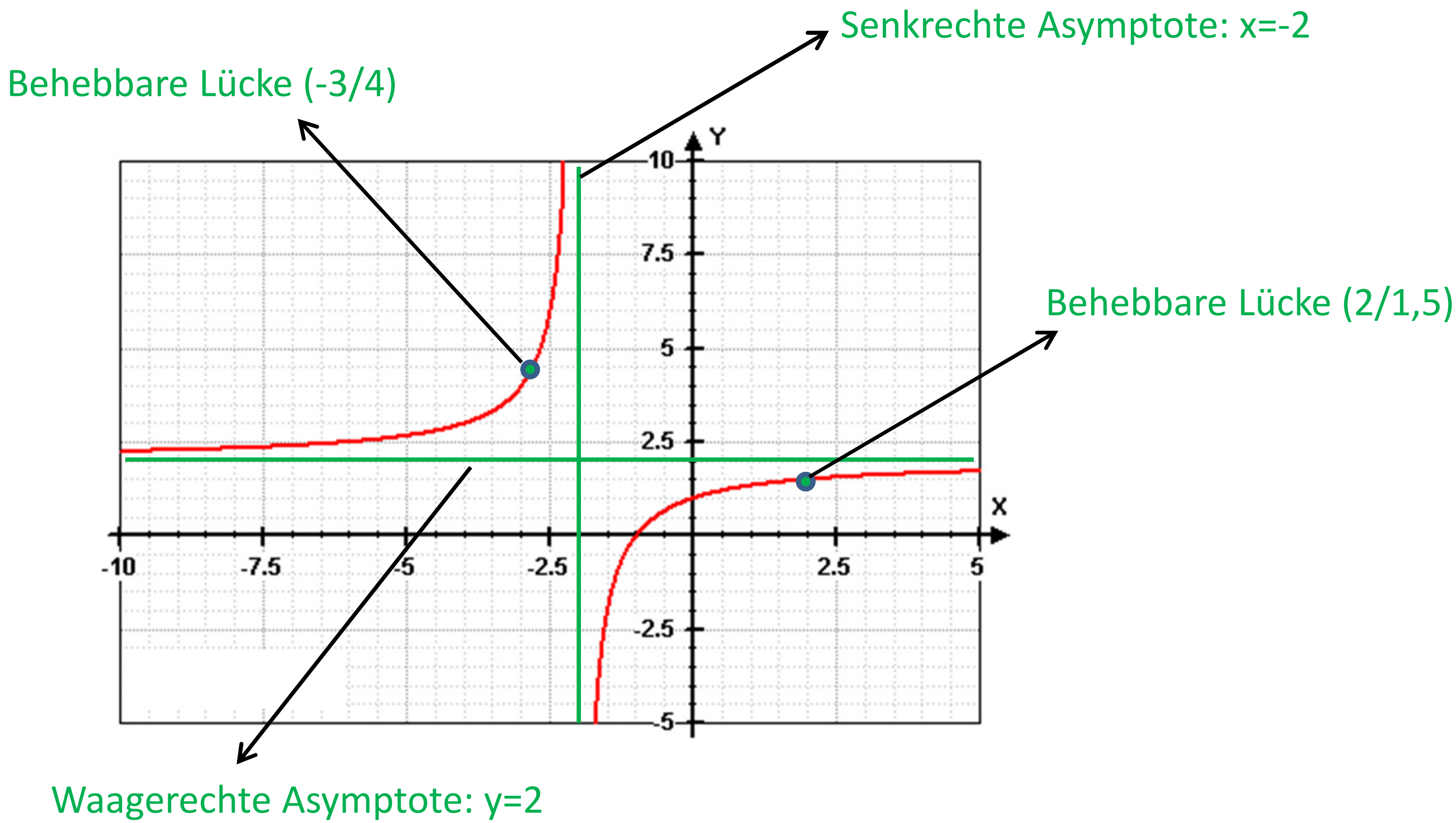
senkrechte Asymptote

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}=2^+ \qquad \lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}=2^-$$

waagerechte Asymptote

ASYMPTOTEN III

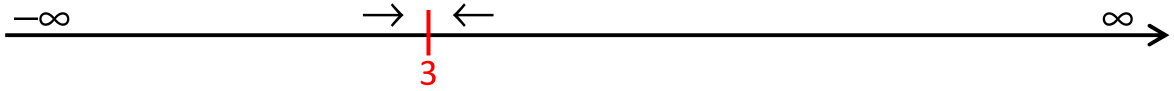
Funktionsgraph zu Beispiel A:



ASYMPTOTEN IV

Beispiel B:

$$f(x)=\frac{x^2-2x-8}{x-3}\Rightarrow D=R\setminus\{3\}$$



$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\left[\frac{-5}{0^+}\right]=-\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x)=\left[\frac{-5}{0^-}\right]=\infty \longrightarrow$$

Senkrechte Asymptote

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)}=[x]=\infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\Rightarrow (x^2-2x-8)\div(x-3)=\underbrace{x+1}_{\text{diagonale Asymptote}}+\frac{-5}{x-3}$$

$$\begin{array}{l} -(x^2-3x) \\ \hline \quad x-8 \\ \quad -(x-3) \\ \hline \quad -5 \end{array}$$

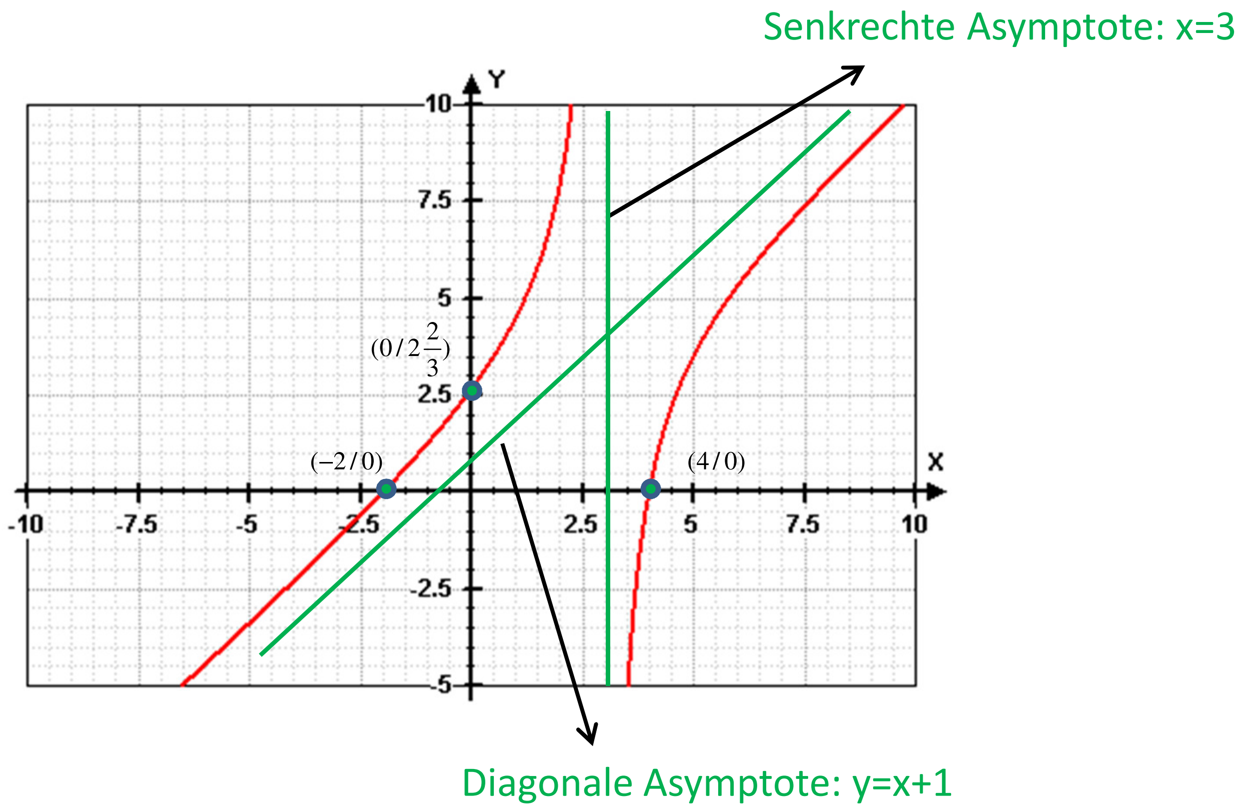
diagonale Asymptote

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3} \\ \\ f(x)=0 \\ 0=(x-4)\cdot(x+2) \\ x_1=4\vee x_2=-2 \end{array}\right\}$$

Achsen-Schnittpunkte

ASYMPTOTEN V

Funktionsgraph zu Beispiel B:



AUFGABEN

I. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

1) $$f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{2x^3-2x^2-16x+24}$$

2) $$f(x)=\frac{x^3-7x^2+2x+40}{x^2-x-12}$$

3) $$f(x)=\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2+2x-8}$$

4) $$f(x)=\frac{x^2-8x+12}{x^3+2x^2-9x-18}$$

5) $$f(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^3+5x^2-2x-24}$$

STETIGKEIT

Eine Funktion wird über ihren Definitionsbereich als **stetig** bezeichnet, sofern man sie in einem **durchzeichnen** kann, d.h. man darf den Stift nicht vom Blatt nehmen, um die Funktion zeichnen zu können.

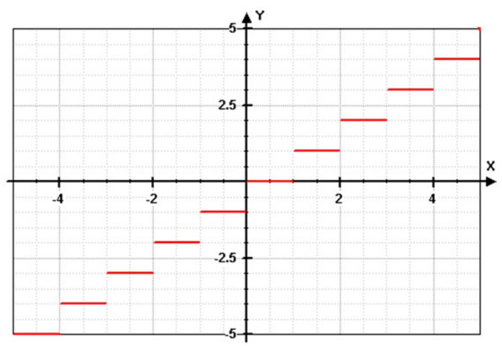
Es gilt: $\boxed{\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim_{x \to \alpha^-} f(x) = f(\alpha)}$

Daher ist eine Untersuchung u.a. primär bei folgenden Funktionen durchzuführen:

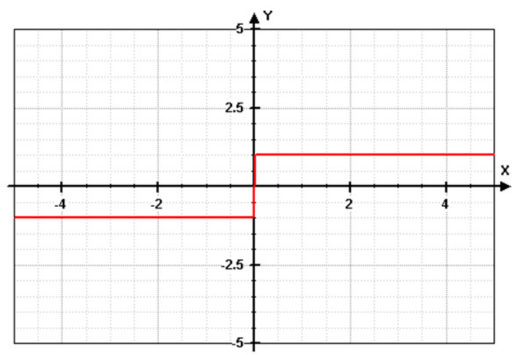
✓Gesplittete Funktion

✓Gebrochenen Funktionen

✓Gauß-Funktion (Abrundung)



✓Sgn-Funktion (Vorzeichen)



DIFFERENZIERBARKEIT

Eine Funktion wird über ihren Definitionsbereich als **differenzierbar** bezeichnet, wenn Sie stetig ist **und** sofern man sie ohne Pause durchzeichnen kann, d.h. der Graph der Funktion darf keinerlei Ecken besitzen.

Es gilt:

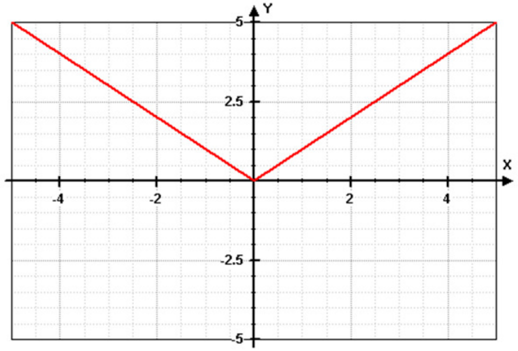
$$\boxed{\lim_{x\to\alpha^+} f'(x) = \lim_{x\to\alpha^-} f'(x) = f'(\alpha)}$$

Daher ist eine Untersuchung u.a. primär bei folgenden Funktionen durchzuführen:

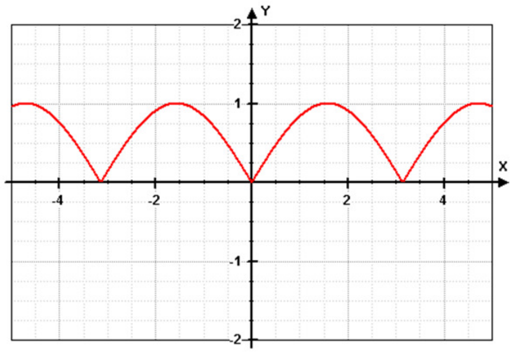
✓Gesplittete Funktion

✓Gebrochenen Funktionen

✓Lineare Betragsfunktion



✓Trigonometrische Betragsfunktion



BEISPIEL I

Gegeben sei die folgende gesplittete Funktion.
Wie sind die Parameter *a* und *b* zu wählen, damit die Funktion stetig und differenzierbar ist?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a; x \geq 1 \\ x \cdot (4-b); x < 1 \end{cases}; a, b \in \Re \qquad \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x; x \geq 1 \\ 4-b; x < 1 \end{cases}$$

<u>stetig</u>:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= x^2 + a = 1 + a = f(1) \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= x \cdot (4-b) = 4-b \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 + a = 4 - b$$

<u>differenzierbar</u>:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f'(x) &= 2x = 2 = f'(1) \\ \lim_{x\to 1^-} f'(x) &= 4-b = 4-b \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 = 4 - b$$

$$2 = 4 - b \Leftrightarrow b = 2$$

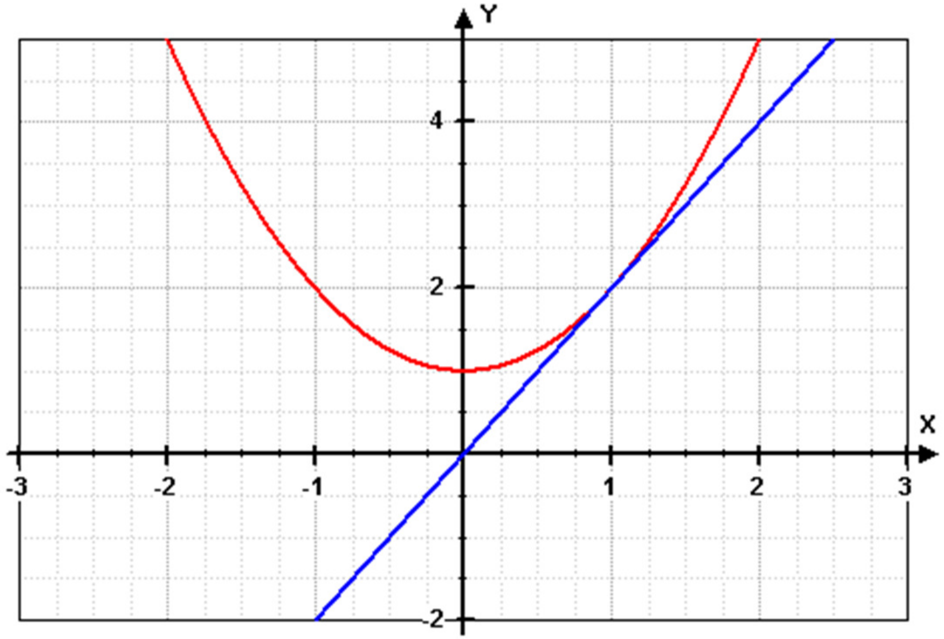
$$a + b = 3 \Leftrightarrow a = 1$$

BEISPIEL II

Durch die Parameter *a=1* und *b=2*, ist die Funktion stetig und differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a = x^2 + 1; x \geq 1 \\ x \cdot (4 - b) = 2x; x < 1 \end{cases}$$

<u>Funktionsgraph</u>:



AUFGABEN

Gegeben seien die folgenden gesplitteten Funktionen.
Berechnen Sie die Parameter *a* und *b*, so dass die Funktion stetig und differenzierbar sind und fertigen Sie eine Skizze der zugehörigen Graphen an.

1) $$f(x) = \begin{cases} -a \cdot x^2 + 1; x < 2 \\ x - 4; x \geq 2 \end{cases}; a \in \Re$$

2) $$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + b; x < 1 \\ x - a \cdot x^2; x \geq 1 \end{cases}; a, b \in \Re$$

Untersuchen Sie die gegebene Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

3) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2}; x > 3 \\ -\dfrac{2}{3} \cdot x^2 + 9; x \leq 3 \end{cases}$$

MATHEMATIK

16.12.2013

WIEDERHOLUNG

Wenn Sie einen Grenzwert bestimmt haben, dann können Sie diesen auch ___________ darstellen und interpretieren. Das machen wir, in dem wir eine ___________zeichnen, an der sich der Funktionsgraph beliebig nahe anschmiegt. Eine derartige Annäherung bezeichnen wir auch als ___________.

Es kann drei Arten von Asymptoten geben:

- ___________Asymptote:

Sie existiert dann, wenn der Grenzwert gegen eine _________unendlich groß wird. Bei der rechts- beziehungsweise linksseitigen Näherung können wir diese Asymptote auch als ___________ mit oder ohne Vorzeichenwechsel bezeichnen.

- ___________Asymptote:

Ist der Grenzwert gegen ________eine konstante Zahl, so haben wir eine waagrechte Annäherung. Je nachdem was für ein Vorzeichen der ___________des Grenzwerts hat, nähern wir uns von oben oder unten der Asymptote.

- ___________Asymptote:

Wenn der Grenzwert gegen die Unendlichkeit wieder ___________ist, so erhalten wir diese diagonale Annäherung. Die zugehörige Funktion berechnen wir durch eine ___________bei der wir den entstehenden Restwert ignorieren.

Für den Fall, dass bei der Grenzwertbestimmung gegen eine Konstante Zahl ___________ entsteht, dann können Sie den zugehörigen ___________kürzen.
Sie erhalten dadurch die Ersatzfunktion und es entsteht grafisch gesehen eine ___________.

Wenn Sie den Grenzwert mathematisch interpretieren möchten, dann führt dies zu den beiden Eigenschaften ___________ (die Funktion hat keine Sprungstellen) und ___________ (die Funktion hat keine Knickstellen).
Der Beweis erfolgt über den ______- und __________Grenzwert der Funktion bzw. der ___________.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was die Tangen- was die Sekantensteigung?
- ✓ Was ist der Differenzenquotient?
- ✓ Was liefert uns die erste/ zweite Ableitung?
- ✓ Aus welchen Schritten besteht die Kurvendiskussion?
- ✓ Wie leitet man eine Potenz ab?
- ✓ Wann nutzen wir die Produktregel?
- ✓ Wie funktioniert die Quotientenregel?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

KURVENDISKUSSION

Ist eine gegebene Funktion auf deren Definitionsbereich **stetig** als auch **differenzierbar**, kann u.a. mittels der Ableitungen deren Verlauf näher beschrieben werden.

Die folgenden **Zusammenhänge** sind bzgl. Funktion und Ableitung gültig:

✓Ausgangsfunktion:	y-Koordinate	(siehe Achsenschnittpunkte)
✓1. Ableitung:	Steigung	(Extremstellen)
✓2. Ableitung:	Krümmung	(Wendestellen)

Eine **Kurvendiskussion** besteht daher im Wesentlichen aus den folgenden Schritten:

1. Definitions- und Wertebereich
2. Grenzwertbestimmung
3. Symmetrieverhalten (Achsen-/ Punktsymmetrie)
4. Achsenschnittpunkte (x-/ y-Achse)
5. Extremstellen (Hoch-/ Tiefpunkte)
6. Wendestellen
7. Funktionsgraph

ABLEITUNGEN

Handelt es sich um ein **ganzrationales** Polynom, eine „einfache“ **n-te Wurzel** oder ein einfaches x hoch n im **Nenner**, so werden die Ableitungen mittels folgendem Gesetz gebildet:

$$\boxed{f(x) = \alpha \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot n \cdot x^{n-1}}$$

Im ersten Schritt muss der Ausdruck in einen reinen Potenzausdruck umgewandelt werden

✓<u>Ganzrationales Polynom</u>:

$$f(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 4$$

$$f'(x) = 12 \cdot x^3 - 4 \cdot x + 12$$

✓<u>N-te Wurzel</u>:

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3 \cdot x^{\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{9}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$$

✓<u>Einfacher Bruch</u>:

$$f(x) = \frac{3}{2 \cdot x^4} = \frac{3}{2} \cdot x^{-4}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot (-4) \cdot x^{-5} = -\frac{6}{x^5}$$

AUFGABEN

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die 1. und 2. Ableitung.
Prüfen Sie ferner ob eine Achsen- / Punktsymmetrie vorliegt.

1) $$f(x) = -2 \cdot x^6 + 0{,}5 \cdot x^2 - 7$$

2) $$f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^4}} - \sqrt[5]{x^2}$$

3) $$f(x) = \frac{5}{x^5} - 2 \cdot \frac{3}{x}$$

PRODUKTREGEL

Handelt es sich bei der abzuleitenden Funktion um ein **Produkt**, das aus mindestens zwei **verschiedenen Funktionen** besteht, ist die Produktregel anzuwenden.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= g(x)\cdot h(x) \\ f'(x) &= g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x) \end{aligned}}$$

Es empfiehlt sich die Funktionen des Produkts zuerst **separat** abzuleiten und anschließend die Formel mit den **Zwischenergebnissen** zu füllen.

<u>Beispiel</u>:

$$f(x) = \sin(x)\cdot\sqrt[3]{x^2} \quad \left\{ \begin{aligned} g(x) &= \sin(x) \\ h(x) &= \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} g'(x) &= \cos(x) \\ h'(x) &= \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}} \end{aligned} \right\} \quad f'(x) = \cos(x)\cdot\sqrt[3]{x^2} + \sin(x)\cdot\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$$

QUOTIENTENREGEL

Handelt es sich bei der abzuleitenden Funktion um einen **Qutienten** (Bruch), der aus mindestens zwei **verschiedenen** Funktionen besteht, ist die Qoutientenregel anzuwenden.

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}}$$

Es empfiehlt sich die Funktionen des Nenners bzw. des Zählers zuerst **separat** abzuleiten und anschließend die Formel mit den **Zwischenergebnissen** zu füllen.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^3 - 4x} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \cos(x) \\ h(x) = x^3 - 4x \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = -\sin(x) \\ h'(x) = 3x^2 - 4 \end{array} \right\} \quad f'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot (x^3 - 4x) - \cos(x) \cdot (3x^2 - 4)}{(x^3 - 4x)^2}$$

AUFGABEN

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die 1. Ableitung und bestimmen jeweils den zugehörigen Definitionsbereich.

1) $f(x) = (x^3 - 5x^4) \cdot 4\cos(x)$

2) $f(x) = 3 \cdot \sin^2(x)$

3) $f(x) = \dfrac{4 \cdot \sqrt[3]{x}}{5x^4}$

4) $f(x) = \dfrac{4 \cdot \left(x^2 + 3x^3\right)}{\cos^2(x)}$

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die beiden Parameter so, dass die Funktion überall stetig und differenzierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} 2a \cdot x^2 - 3b \cdot x; x \geq 1 \\ 6a \cdot \sqrt{x} - 30; x < 1 \end{cases} ; a, b \in \Re$$

2) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{2x^2} + 5 \cdot \left(\sqrt[5]{x}\right)^3$

b) $f(x) = \dfrac{4x \cdot \sqrt{x}}{x^3} - 2 \cdot \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$

3) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten und die Wendepunkte der folgenden Funktion.

a) $f(x) = 4 \cdot x - 30 \cdot x^3 + x^5$

b) $f(x) = x^2 \cdot (12 - 0{,}5x^2) + 8$

4) Bilden Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{x}}{2 \cdot \sqrt{x^3}}$

MATHEMATIK

13.01.2014

WIEDERHOLUNG

Die Steigung zwischen zwei Punkten bezeichnen wir auch als _______________.
Wir berechnen sie mit dem Grenzwert des _______________.

Die Ableitung einer _______________erhalten wir, in dem wir den Exponenten nach vorne bringen und ihn anschließend um eins _______________.
Wenn zwei Funktionen multipliziert werden, dann brauchen wir die _______________und für eine Division die _______________.
Die _______________einer Funktion berechnen Sie, in dem Sie die erste Ableitung gleich Null setzen. Die Überprüfung erfolgt dann entweder, in dem
Sie Werte _______________von der Extremstelle einsetzen und den Monotonieverlauf interpretieren oder durch _______________in die zweite Ableitung.

Ist die zweite Ableitung größer Null, dann haben wir einen _______________.

Einen _______________haben wir demzufolge dann, wenn die zweite Ableitung kleiner ist als Null.
Mit der zweiten Ableitung kann zusätzlich noch die _______________einer Funktion berechnet werden.
In ihr ändert die Funktion ihr Krümmungsverhalten.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was versteht man unter den Additionstheoremen?
- ✓ Welche Symmetrieeigenschaften besitzen Sinus und Cosinus?
- ✓ Wie verändert man die Periode?
- ✓ Was ist eine Phasenverschiebung?
- ✓ Wie können Sie eine trigonometrische Funktion skizzieren?
- ✓ Wie funktioniert die Kettenregel?
- ✓ Was sind höhere Funktionen (Kondomfunktionen)?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

I. Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die 1. und 2. Ableitung.

1) $h(x) = \ln(9+x) + \frac{3}{x} - 10 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

2) $k(x) = \frac{42}{\sqrt[4]{5} \cdot \left(x^3 - 2\sqrt{x}\right)}$

3) $l(x) = 2 \cdot e^x \cdot \left(0{,}25 \cdot \cos(x+12)\right)$

II. Bestimmen Sie zu der gegebenen Funktion die Gleichung der Wendetangenten.

$$f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 50 \cdot (x-1)$$

TRIGONOMETRIE I

Für die Sinus/ Cosinus-Funktion sind im Bereich der **Addition der Argumente** zwei **Additionstheoreme** definiert, wodurch stets bei **rechtwinkliger Konstellation** entweder ein Sinus oder ein Cosinus aus der Funktion **entfernt** werden kann.

1) $\boxed{\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)}$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2x)$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(2x) = \cos(2x)$$

90° Phasenverschiebung
der Sinusfunktion = Cosinusfunktion

2) $\boxed{\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)}$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = \cos(\frac{3}{2}\pi) \cdot \cos(3x) + \sin(\frac{3}{2}\pi) \cdot \sin(3x)$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = 0 \cdot \cos(3x) + (-1) \cdot \sin(3x) = -\sin(3x)$$

270° Phasenverschiebung
der Cosinusfunktion = -Sinusfunktion

TRIGONOMETRIE II

Eine rein trigonometrische Funktion (**sinus/ cosinus**) stellt eine **Schwingung** innerhalb einer bestimmbaren **Periode** und eines konstanten Wertebereichs dar, die für alle reellen Zahlen definiert ist.

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d}$$

Die vier Parameter in der Funktion beziehen sich zum einen auf die **Verschiebung** und zum anderen auf die **Streckung/ Stauchung** in der x-Achsen bzw. y-Achsen-Richtung:

a:	Amplitudenfaktor	Streckung/Stauchung in y-Achsen-Richtung
b:	Periodenfaktor	Streckung/Stauchung in x-Achsen-Richtung
c:	Phasenverschiebung	Verschiebung in x-Achsen-Richtung
d:	Wertebereichverschiebung	Verschiebung in y-Achsen-Richtung

Symmetrie:

- SIN: Punktsymmetrie $\quad f(x) = -f(-x) \Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
- COS: Achsensymmetrie $\quad f(x) = f(-x) \Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$

Bei dem Periodenfaktor gilt für die **neue Periode**: $\boxed{P_{NEU} = \frac{P_{ALT}}{b}}$

TRIGONOMETRIE III

Anhand der folgenden Vierfeldertafel können die grundlegenden Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion direkt abgelesen werden.

Es wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um eine Standardfunktion in der Form $sin^n\big(g(x)\big)$ oder $cos^n\big(h(x)\big)$ handelt.

Vierfeldertafel

	$\boldsymbol{n = gerade}$	$\boldsymbol{n = ungerade}$
$\boldsymbol{sin^n\big(g(x)\big)}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = -f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$\boldsymbol{cos^n\big(h(x)\big)}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$

TRIGONOMETRIE IV

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 3\pi) + 4$

Vereinfachung: $f(x) = 3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(3\pi) + \sin(3\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$

$$f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

Wertebereich: $-3 \cdot [-1;1] + 4 = [-3;3] + 4 \Longrightarrow W = y \in [1;7]$

Periode: $P_{NEU} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi \Rightarrow f(x) = f(x + 3\pi)$

$$f(x) = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x + 3\pi)) + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 2\pi) + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

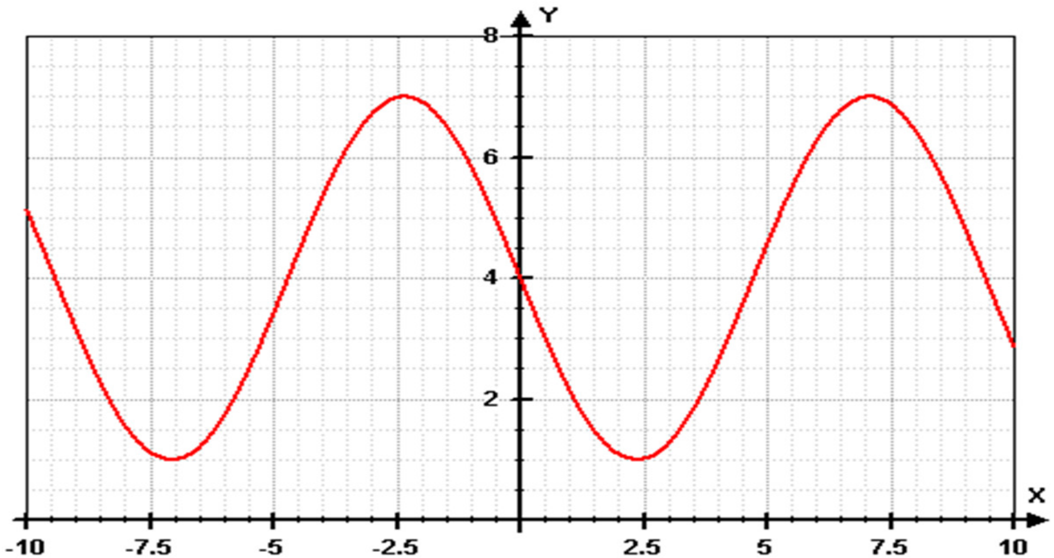
TRIGONOMETRIE V

Beispiel: $f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$

Symmetrie: Punktsymmetrie $f(x) - 4 = -[f(-x) - 4]$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4 - 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) \\ -[f(-x) - 4] = -\left[-3 \cdot \sin(-\frac{2}{3}x) + 4 - 4\right] = 3 \cdot \sin(-\frac{2}{3}x) \end{array}\right\} =$$

Skizze:



AUFGABEN

Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und fertigen Sie eine Skizze an.

1) $$f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(4x - 5\pi)$$

2) $$g(x) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\pi\right) + 5$$

3) $$h(x) = 3 \cdot \left[\cos(2x - \pi) + 2\right]$$

4) $$k(x) = 5 + \frac{2}{3} \cdot \cos^4\left(\frac{1}{2} \cdot (\pi - x)\right)$$

KETTENREGEL

Sofern die Ableitung von einer **höherwertigen Funktion** gebildet werden soll, muss die Kettenregel angewandt werden.
Diese besagt, dass man mit der **äußersten Ableitung** beginnt und sich anschließend **mittels Produkt** Stück für Stück via Ableitungen zu der **innersten Funktion** nähert.

$$\boxed{f(x) = g[h(x)] \Rightarrow f'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)}$$

Beispiel:

$$f(x) = \sin(e^{4-3x})$$

$$[\sin(\alpha)]' = \cos(\alpha)$$

$$f'(x) = \cos(e^{4-3x}) \cdot [(e^{4-3x})]'$$

$$[e^{\alpha}]' = e^{\alpha}$$

$$f'(x) = \cos(e^{4-3x}) \cdot (e^{4-3x}) \cdot [4-3x]'$$

$$[\alpha \cdot x^n]' = \alpha \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$f'(x) = \cos(e^{4-3x}) \cdot (e^{4-3x}) \cdot (-3)$$

KONDOM-FUNKTION I

Eine **Kondom-Funktion** (höherwertige Funktion) ist dann vorhanden, wenn eine Funktion über eine andere Funktion **gestülpt** wird. (siehe Kettenregel).

✓Potenzfunktion:

$$\boxed{f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = (x^3 - 4x)^3$$

$$f'(x) = 3 \cdot (x^3 - 4x)^2 \cdot [x^3 - 4x]' = 3 \cdot (x^3 - 4x)^2 \cdot (3x^2 - 4)$$

✓Trigonometriefunktion:

$$\boxed{f(x) = \sin[g(x)] \Rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = \sin(0{,}5x^2)$$

$$f'(x) = \cos(0{,}5x^2) \cdot [0{,}5x^2]' = \cos(0{,}5x^2) \cdot x$$

$$\boxed{f(x) = \cos[g(x)] \Rightarrow f'(x) = -\sin(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = 2 - 3 \cdot \cos(3 - 4x)$$

$$f'(x) = 3 \cdot \sin(3 - 4x) \cdot [3 - 4x]' = -12 \cdot \sin(3 - 4x)$$

KONDOM-FUNKTION II

✓Logartihmusfunktion: $\boxed{f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$

$$f(x) = \ln(\cos(x))$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot [\cos(x)]' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\tan(x)$$

✓Exponentialfunktion: $\boxed{f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)}$

$$f(x) = e^{3 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = e^{3 \cdot \sqrt{x}} \cdot \left[3 \cdot \sqrt{x}\right]' = e^{3 \cdot \sqrt{x}} \cdot \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Diese vier Funktionsklassen repräsentieren nahezu alle höherwertige Funktionen, wobei auch bei einer Verschachtelung von mehrerer dieser Funktionen immer die Kettenregel anzuwenden ist.

AUFGABEN

Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die ersten Ableitungen

1) $f(x) = 2 \cdot \sin(3x^3 - 5\sqrt{x})$

2) $g(x) = \ln(\frac{3}{x^3})$

3) $h(x) = 2(x^3 - \sin(4x))^5$

4) $k(x) = \sqrt[3]{e^{2x+1} - 4} \cdot \sin(3x)$

5) $l(x) = \ln(\sin(4x)) \cdot \sqrt{x^2 - 3x}$

6) $m(x) = \frac{(\sqrt{3x^3} + 2)^2}{5 \cdot \cos(3x - e^{2x})}$

MATHEMATIK

17.01.2014

WIEDERHOLUNG

Unter dem _______________von Sinus/ Cosinus verstehen wir den Term, der hinter den ______________Funktionen steht.
Eine Summe vereinfachen wir mittels der _______________.

Die Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion lassen sich wie folgt beschreiben:

- _______________:
  Hier verschieben wir die Funktion in Richtung der x-Achse, wobei die Steuerung der _______________als Summand im Argument übernimmt.

- _______________:
  Damit Sie die Ausgabewerte verändern können, müssen Sie entweder eine konstante Zahl hinzufügen (Verschiebung in Richtung der ___________) oder aber Sie _______________den Sinus/ Cosinus mit einer Zahl(Streckung in Richtung der _______________).

- _______________:
  Mit dem _______________vor dem x im Argument können Sie die _______________/ Frequenz der Funktion verändern. Ist der Faktor größer eins, wird die Funktion in x-Richtung gestreckt bei kleiner eins gestaucht.

Eine Sinus-Funktion mit ungeradem Exponenten ist immer _______________, während alle anderen Varianten stets ________________ sind.

Die _____________ benötigen wir immer dann, wenn es sich um eine höhere Funktion handelt. Dabei bilden wir die äußere Ableitung und multiplizieren diese mit der _____________ Ableitung.

Die Kettenregel nutzen wir dann, wenn eine sogenannte _____________ vorliegt.
Diese lassen sich in vier Klassen unterteilen:

- _____________
- _____________
- _____________
- _____________

Handelt es sich bei der Exponential- oder Logarithmusfunktion nicht um eine ____________ bzw. den Logarithmus ____________, müssen wir zuerst die ______ transformieren, bevor wir ableiten dürfen.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was sucht man bei einem unbestimmten Integral?
- ✓ Wie ist ein allgemeines, bestimmtes Integral aufgebaut?
- ✓ Worauf ist bei der Integration zu achten?
- ✓ Wie bildet man die Stammfunktion eines Potenzausdrucks?
- ✓ Wie berechnen wir Flächen eines bestimmten Integrals?
- ✓ Wie bestimmen wir Flächen zwischen Funktion und x-Achse?
- ✓ Was machen wir bei negativen Flächen?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(6 - 4{,}5 \cdot \cos\left(\frac{1}{3}x - 4{,}5\pi\right)\right) - 4$$

b) $$g(x) = -3 \cdot \cos^4(4x + \frac{3}{2}\pi) - 2$$

2) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $h(x) = 4 \cdot \ln\sqrt{5 - 2x^3}$

b) $l(x) = 2 \cdot e^{\sqrt[5]{10x^2 - 8}}$

c) $$k(x) = \frac{2}{\left(\sin(3x) - x^2\right)^3}$$

INTEGRALRECHNUNG I

Mittels der Integralrechnung wird z.B. eine **Fläche** zwischen einer **Funktion** und der **X-Achse** in gegebenen Grenzen bestimmt.
Eine Funktion, die durch Einsetzen der Grenzen den gesuchten Inhalt liefert nennt man **Stammfunktion**, für die folgender Zusammenhang gilt:

$$\boxed{[F(x)]' = f(x)}$$

Stammfunktion Integrandfunktion

Die Ableitung der Stammfunktion ist die Integrandfunktion.

✓<u>Unbestimmte Integral</u>: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$

Es handelt sich um ein Integral, in dem die **Grenzen nicht gegeben** sind.
Es ist darauf zu achten, dass bei diesem Intergaltyp die Stammfunktion durch eine **Konstante** ergänzt werden muss.

✓<u>Bestimmtes Integral</u>: $\boxed{\int_b^a f(x)dx = \left|F(x)\right|_b^a = F(a) - F(b)}$

Es handelt sich um ein Integral, in dem die **Grenzen gegeben** sind.
Die gesuchte Fläche berechnet sich durch die **Differenz** der Stammfunktion an der **oberen** und **unteren** Grenze.

INTEGRALRECHNUNG II

Die Stammfunktion einer Funktion wird quais mittels **Aufleitung** gebildet. Im Fall einer einfachen **Potenzfunktion** ergibt sich:

$$\boxed{f(x) = a \cdot x^n \Leftrightarrow F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}}$$

Beweis: $[F(x)]' = f(x)$

$$\left[\frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}\right]' = \frac{a}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{(n+1)-1} = a \cdot x^n = f(x)$$

Regeln/ Eigenschaften der Integration:

Da es **keine negativen Flächen** gibt, muss auch der Wert einer Integrals stets **positiv** sein. *Man berechnet im 1. Schritt das Integral, ist das Ergebnis negativ, so setzt man bis zum ersten Rechenschritt Betragsstriche.*

Man darf **niemals** über eine **Nullstelle hinweg** integrieren, da dadurch die Flächendifferenz entstehen würde. *Es wird also im 1.Schritt auf Nullstellen der Intefrandfunktion untersucht und das Integral anschließend in Bereiche unterteilt.*

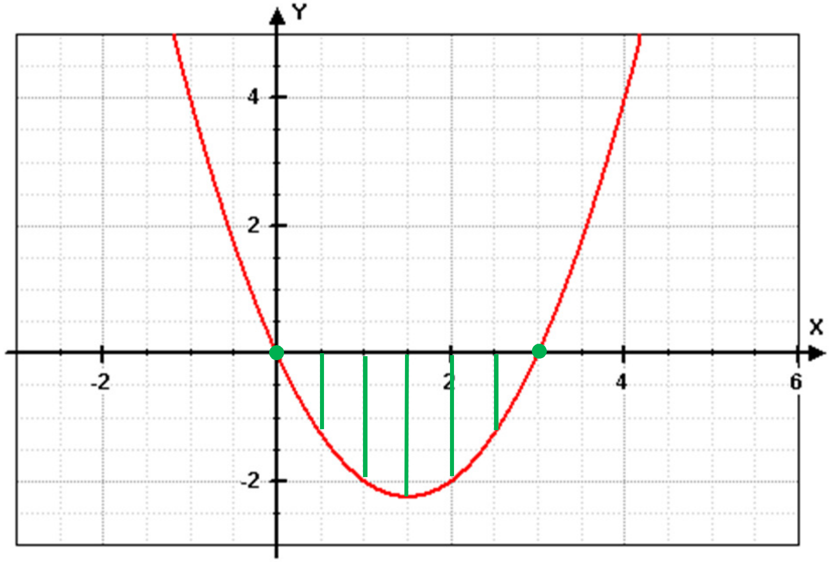
INTEGRALRECHNUNG III

Beispiel (unbestimmtes Integral):

$$\int \left(x^3 - 2x + 5\right)dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 - x^2 + 5 \cdot x + C$$

Beispiel (bestimmtes Integral/ zwischen Graph und x-Achse):

$$\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right)dx = \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right|_0^3 = \left|F(3) - F(0)\right| = \left|\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - 0\right]\right| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}$$



INTEGRALRECHNUNG IV

Beispiel (bestimmtes Integral/ mit Nullstellen innerhalb der Grenzen):

$$\int_1^5 (x-3)dx = \int_1^3 (x-3)dx + \int_3^5 (x-3)dx$$

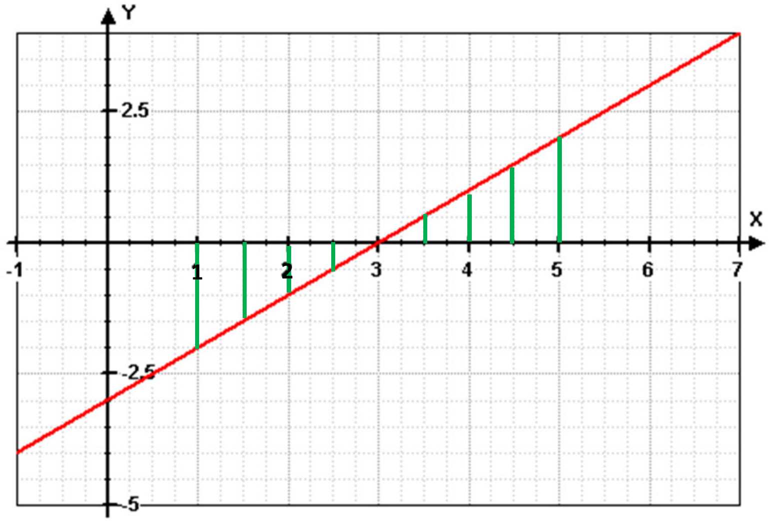
$$\int_1^5 (x-3)dx = \left|\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\right|_1^3 + \left|\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\right|_3^5$$

$$\int_1^5 (x-3)dx = |F(3) - F(1)| + |F(5) - F(3)|$$

$$\int_1^5 (x-3)dx = \left|\left(\frac{9}{2} - 9\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)\right| + \left|\left(\frac{25}{2} - 9\right) - \left(\frac{9}{2} - 9\right)\right|$$

$$\int_1^5 (x-3)dx = \left|\left(-\frac{9}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{7}{2}\right) - \left(-\frac{9}{2}\right)\right|$$

$$\int_1^5 (x-3)dx = \left|-\frac{4}{2}\right| + \left|\frac{16}{2}\right| = 10$$



AUFGABEN

1) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die zugehörige Stammfunktion.

a) $f(x) = 3x - 6x^2 - 5x^4 + 12$

b) $g(x) = \frac{7}{x^2} - \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x}$

2) Bestimmen Sie die Fläche die von der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird.

a) $g(x) = -x^2 - 3x - 2 \wedge x - Achse$

3) Berechnen Sie die Nullstellen der Integrandfunktion und geben anschließend den Flächeninhalt des Integrals an.

a) $\int_1^4 \left(x^2 + 2x - 8\right) dx$

b) $\int_{-2}^{2} \left(x^4 - 4x^3\right) dx$

MATHEMATIK

20.01.2014

WIEDERHOLUNG

Den Ausdruck hinter dem Integralzeichen nennen wir auch _____________ und durch die Aufleitung erhalten wir dann die zugehörige _____________.

Umgekehrt gilt, dass die __________ der Stammfunktion wieder die Integrandfunktion ergeben muss.
Im Bereich der Integrale unterscheiden wir zum einen die _____________ (ohne Grenzen) und zum anderen die ____________ (Grenzen sind gegeben).

Einen reinen Potenzterm können Sie aufleiten, in dem Sie den _______ des Exponenten um eins erhöhen und diesen neuen Exponenten in den _____________ davor schreiben.

In der Integralrechnung handelt es sich bei den sogenannten bestimmten Integralen immer um _________, die sich innerhalb von definierten ________ zwischen der Funktion und der _____________ aufspannt.

Für diese Flächen sollten Sie zwei goldene Regeln kennen:
Eine Fläche ist immer _____________. Entsteht nach dem Einsetzen der Grenzen ein negativer Wert, so machen Sie diesen durch den _____________wieder positiv.

Wir integrieren niemals über eine _____________ hinweg, so dass Sie bei gegebenen Grenzen immer prüfen müssen, ob in diesem Intervall die _____________ Nullstellen besitzt. Sollte dies der Fall sein, müssen wir _____________ definieren und diese berechnen.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wie bestimmt man eine höhere Stammfunktion?
- ✓ Wie berechnen wir eine Fläche zwischen Funktionen?
- ✓ Was bedeuten die Nullstellen der Integrandfunktion?
- ✓ Wann sprechen wir von einem endlichen Integral?
- ✓ Was ist der Grenzwert eines Integrals?
- ✓ Wie können Integrale mit Parametern berechnet werden?
- ✓ Wie bestimmen wir die Grenzen aufgrund einer Fläche?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die zugehörige Stammfunktion.

a) $f(x) = 9x^2 - 12 \cdot \sqrt[3]{x} + 4$

b) $g(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{5}$

2) Bestimmen Sie die Fläche die von der Funktion und der x-Achse im ersten Quadratnetn eingeschlossen wird.

$$g(x) = x^2 - 2x - 3$$

3) Berechnen Sie die Nullstellen der Integrandfunktion und geben anschließend den Flächeninhalt des Integrals an.

$$\int_0^3 \left(x^2 + 3x - 4\right) dx$$

INTEGRALRECHNUNG V

Die Stammfunktion einer höheren Funktion kann mit folgender Methodik gebildet werden:

1. Die äußere Funktion wird als Nebenrechnung **aufgeleitet**.
2. Diese Testfunktion wird nun **abgeleitet**.
3. Mittels Faktoren kann nun die Ableitung der Stammfunktion **ausgleichen** werden.

<u>Beispiel</u>: $f(x) = 2 \cdot e^{3x+12}$

1. Aufleitung: $G(x) = e^{3x+12}$
2. Ableitung: $g(x) = e^{3x+12} \cdot [3x+12]' = 3 \cdot e^{3x+12}$
3. Ausgleich: $3 \cdot ? = 2$

$$F(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{3x+12}$$

Probe: $F'(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{3x+12} \cdot [3x+12]' = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot e^{3x+12} = 2 \cdot e^{3x+12} = f(x)$

INTEGRALRECHNUNG VI

Um die Fläche **zwischen zwei Funktionen** zu berechnen, bestimmt man das Integral der **Differenzfunktion** innerhalb der existierenden **Nullstellen**.

1. Nullstellenberechnung: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = \alpha \vee x_2 = \beta$

2. Integration der Differenzfunktion: $\int_{\beta}^{\alpha} (f(x) - g(x))dx$

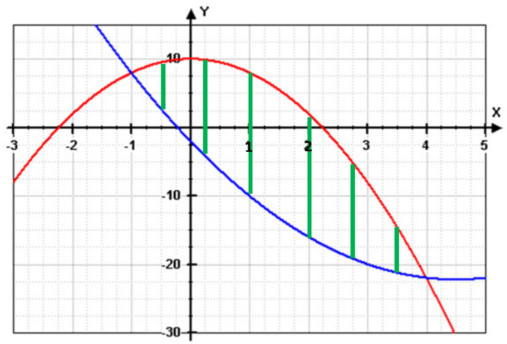
<u>Beispiel</u>: $f(x) = 10 - 2x^2 \wedge g(x) = x^2 - 9x - 2$

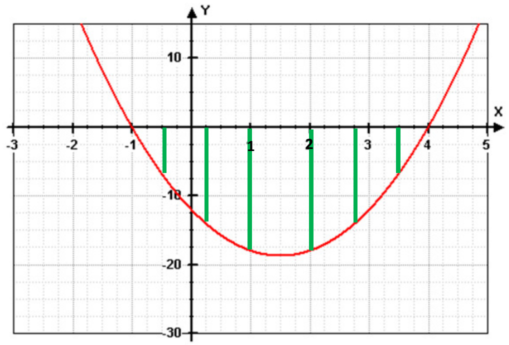
1. Nullstellen: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10 - 2x^2 = x^2 - 9x - 2$

$= 3x^2 - 9x - 12 = 3 \cdot (x-4) \cdot (x+1) = 0$

2. Integration: $\int_{-1}^{4} (3x^2 - 9x - 12)dx = \left| x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x \right|_{-1}^{4}$

$= |F(4) - F(-1)| = |-56 - 6{,}5| = 62{,}5$





AUFGABEN

1) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die zugehörige Stammfunktion.

a) $h(x) = 7x - 2 \cdot e^{3x-4}$

b) $k(x) = 4 \cdot (5 - 3x)^3$

2) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} \wedge g(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{5x - 6} \wedge g(x) = x$

INTERGALE VII

Abhängig von den zugehörigen **Integrandfunktionen** wird im Bereich der Flächeninhaltsberechnung zwischen **unendlichen** und **endlichen** Integralen unterschieden.
Um die entsprechende Eigenschaft **klassifizieren** zu können, wird zuerst die Stammfunktion an der **gegebenen Stelle** berechnet und anschließend mittels **Grenzwertbetrachtung** gegen Unendlich oder Konstant der Wert des Integrals bestimmt.

- ✓ unendliche Integrale:

  Dem Integral kann **kein exakter Wert** zugewiesen werden bzw. strebt der gesuchte Flächeninhalt gegen unendlich.
  Dies geschieht z.B. an den senkrechten Asymtoten (Definitionslücken) einer Funktion.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\big(f(x)\big) = \infty$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \left|-\frac{1}{2\cdot(x-1)^2}\right|_0^1 = \left|\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{2\cdot(x-1)^2}+\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\left[-\infty+\frac{1}{2}\right]\right| = |-\infty| = \infty$$

Man erkennt, dass durch die Grenzwertbetrachtung unendlich als Resultat herauskommt, was keinem exakten Flächeninhalt entsprechen kann.

INTERGALE VIII

✓ Endliche Integrale:

Es handelt sich um einen **festen Wert**, der dem Integral zugewiesen werden kann.
Dieser liegt z.B. dann vor, wenn sich die Fläche innerhalb **zweier Nullstellen** befindet oder auch bei der Bestimmung des Inhalts **zwischen zwei** gegebenen Funktionen.

Wird allerdings der Flächeninhalt bis ins **Unendliche** gesucht, so muss der Grenzwert der **Integrandfunktion** (im Undendlichen) **Null** sein.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right) = 0$$

$$\int_2^\infty f(x)dx = \left| -\frac{1}{x} \right|_2^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) = \left[0^- + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

Auch hier wird mittels **Grenzwertbetrachtung** der Stammfunktion die Fläche gesucht.
Da die Stammfunktion allerdings im Unendlichen Null ist, fällt sie ganz weg und man erhält einen **konstanten Wert** für die gesuchte Fläche.

AUFGABEN

1) Geben Sie den Wert des folgenden Integrals an und klassifizieren Sie diesen.

a) $\int_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{x^5} \right) dx$ b) $\int_{0}^{1} \left(\frac{2}{x} \right) dx$

2) Bestimmen die Grenze des Integrals, so dass die gegebene Fläche erreicht wird.

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left(\frac{1}{(2x-2)^2} \right) dx = \frac{1}{16}$$

MATHEMATIK

27.01.2014

WIEDERHOLUNG

Bei _____________, die zu der Klasse der Kondomfunktionen gehören, bildet man im ersten Schritt die Stammfunktion der äußeren Funktion.
Anschließend wird diese Funktion zur _____________abgeleitet und im letzten Schritt gleicht man die fehlenden _____________aus und erhält somit die Stammfunktion.
Um die _____________zwischen zwei Funktionen bestimmen zu können, setzt man diese zuerst gleich und bestimmt somit die _____________. Die berechneten Zahlen geben die ____________ an.
Anschließend bildet man die _____________und nutzt diese für die Integartion, d.h. bildet die _____________, setzt die Grenzen ein und berechnet die Fläche.
Es ist auch hier darauf zu achten, dass die Fläche stets _____________sein muss.

Im Bereich der Integralrechnung können zwei Spezialfälle auftreten:

- _____________Integrale:

Es handelt sich um ein solches Integral, wenn eine der _____________eine Definitionslücke der Integrandfunktion ist.

- _____________eines Integrals:

Hier wird das Integral für mindestens eine der _____________in der Unendlichkeit betrachtet.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was ist eine reduzierende Funktion?
- ✓ Wann sprechen wir von einer alternierende Funktion?
- ✓ Wie funktioniert die partielle Integration?
- ✓ Welche Fälle treten bei der partiellen Integration auf?
- ✓ Wie vermeidet man eine Endlosintegration?
- ✓ Kombination von Funktion und Ableitung als Integrandausdruck.
- ✓ Allgemeingültige Methodik zur Integralberechnung
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Lösen Sie die folgenden Integralgleichungen.

a) $\int_1^z \left(3x^2 - 3\right) dx = 4$

2) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die zugehörige Stammfunktion.

a) $h(x) = 3 - 2 \cdot \sin(5 - 4x)$

b) $k(x) = \sqrt[3]{12 - 0{,}5x}$

3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 5 \wedge g(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x \cdot \left(x^2 - x\right) \wedge g(x) = x^2 + x - 2$

FUNKTIONSARTEN

Für die Berechnung komplizierter Stammfunktionen ist es wichtig, die Arten der möglichen Integrandfunktion näher zu beschreiben.
Die Unterscheidung bezieht sich im Wesentlichen auf die Art der Ableitungen:

- ✓ <u>Reduzierende Funktion:</u>

  Eine solche Funktion liegt dann vor, wenn sich beim Ableiten eines Ausdrucks der Exponent reduziert und letztlich zu einer Konstanten wird (Polynom vom Grade n).

  $$f(x) = 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 \Rightarrow f''(x) = 12x \Rightarrow f'''(x) = 12$$

  Nach n Ableitungen verschwindet die Funktion komplett (wird Null).

- ✓ <u>Alternierende Funktion:</u>

  Eine solche Funktion liegt dann vor, wenn sich beim Ableiten eines Ausdrucks die entstehende Funktionsklasse nicht verändert (Trigonometrie, Exponential).

  $$f(x) = e^{2x+1} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f''(x) = 4 \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f'''(x) = 8 \cdot e^{2x+1} \Rightarrow \ldots$$

  Nach n Ableitungen ist die Funktion immer noch die gleiche (alternierend).

INTEGRATIONSVERFAHREN

Trifft hinter dem Integralzeichen eine **Funktion** auf deren **Ableitung**, kann dies entweder in Form eines **Produktes** oder als **Quotient** geschehen.
Aufgrund der Kettenregeldefinition ergeben sich dadurch folgende Zusammenhänge:

<u>Produkt:</u>

$$\boxed{\int \left(f(x)\cdot f'(x)\right)dx = \frac{1}{2}\cdot[f(x)]^2 + C}$$

$$\left[\frac{1}{2}\cdot[f(x)]^2 + C\right]' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot[f(x)]^{2-1}\cdot f'(x) + 0 = f(x)\cdot f'(x)$$ *Beweis*

<u>Quotient:</u>

$$\boxed{\int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx = \ln\left(f(x)\right) + C}$$

$$\left[\ln\left(f(x)\right) + C\right]' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ *Beweis*

PARTIELLE INTEGRATION I

Besteht die **Integrandfunktion** aus einem **Produkt** von zwei unterschiedlichen Funktionen, so muss **partiell integriert** werden.
Das anzuwendende Verfahren ergibt sich aus der **bekannten Produktregel** der Ableitungen:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x) = [f(x)\cdot g(x)]' - g'(x)\cdot f(x)$$

Durch die Bildung der „Aufleitung“ auf beiden Seiten ergibt sich automatisch die Produktregel der Integration sprich die **partielle Integration**:

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g'(x)\cdot f(x)}$$

Fall 1:
Trifft eine **reduzierende** auf eine **alternierende** Funktion, sollte g(x) als reduzierend und f‘(x) als alternierende Funktion gewählt werden, da nach n Integrationen die reduzierende Funktion verschwindet.

Fall 2:
Sind die beiden Faktoren des Produkt alternierende Funktionen, so muss max. zweimal partiell integriert werden, da nach dem 2. Schritt automatisch das Ausgangsintegral entsteht.

PARTIELLE INTEGRATION II

<u>Beispiel zu Fall 1:</u> $\int\left(x^2 \cdot e^{2x}\right)dx = F_1(x) + C$ *g(x)=reduzierend; f(x)=alternierend*

1. Schritt:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f'(x) = e^{2x} & \Rightarrow & f(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} \\ g(x) = x^2 & \Rightarrow & g'(x) = 2\cdot x \end{array}\right\} F_1(x) = \boxed{\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot x^2} - \boxed{\int\left(\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot 2\cdot x\right)dx}$$

$$\int\left(e^{2x}\cdot x\right)dx = F_2(x) + C$$

2. Schritt:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f'(x) = e^{2x} & \Rightarrow & f(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} \\ g(x) = x & \Rightarrow & g'(x) = 1 \end{array}\right\} F_2(x) = \boxed{\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot x} - \boxed{\int\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right)dx}$$

$$\Rightarrow \int\left(x^2\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot x^2 - \left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot x - \frac{1}{4}e^{2x}\right) + C = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$$

PARTIELLE INTEGRATION III

Beispiel zu Fall 2: $\int \left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = F_1(x)+C$ *g(x)=alternierend; f(x)=alternierend*

1. Schritt:
$$\left.\begin{cases} f'(x)=e^{2x} & \Rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x} \\ g(x)=\sin(x) & \Rightarrow \quad g'(x)=\cos(x) \end{cases}\right\} F_1(x)=\boxed{\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin(x)}-\boxed{\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x)\right)dx}$$

$$\int \left(e^{2x}\cdot\cos(x)\right)dx = F_2(x)+C$$

2. Schritt:
$$\left.\begin{cases} f'(x)=e^{2x} & \Rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x} \\ g(x)=\cos(x) & \Rightarrow \quad g'(x)=-\sin(x) \end{cases}\right\} F_2(x)=\boxed{\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x)}-\boxed{\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot(-\sin(x))\right)dx}$$

$$\Rightarrow \int \left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x)+\frac{1}{2}\int\left(e^{2x}\cdot\sin(x)\right)dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \int \underline{\left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right)-\frac{1}{4}\int\underline{\left(e^{2x}\cdot\sin(x)\right)}dx$$

$$\frac{5}{4}\int \left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right) \Leftrightarrow \int\left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{2}{5}e^{2x}\cdot\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right)$$

METHODIK DER INTEGRATION

Aufgrund der Vielzahl der Möglichkeiten eine Stammfunktion zu entwickeln, sollte folgende Vorgehensmethodik angewandt werden:

1. Einfache Aufleitung: $\boxed{f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}}$

---

2. Produkt $\left(f(x) \cdot f'(x)\right)$: $\boxed{\int \left(f(x) \cdot f'(x)\right) dx = \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 + C}$

---

3. Quotient $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$: $\boxed{\int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx = \ln\left(f(x)\right) + C}$

---

4. Alternierend $\nearrow$ reduzierend / $\searrow$ alternierend : $\boxed{\int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int g'(x) \cdot f(x)}$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie zu den gegebenen Funktionen deren Stammfunktion.

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ b) $g(x) = -\tan(x)$ c) $h(x) = \frac{8x^3 - 16x}{(2x^2 - 4)^2}$

2) Bestimmen die folgenden beiden unbestimmten Integrale.

a) $\int \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot \cos(2x) \right) dx$

b) $\int \left(\cos(2x) \cdot e^{3-2x} \right) dx$

JIPIEHHH, ES IST GESCHAFFT!!!!!