Torsten Schreiber 30.11.2011

Klausur zum Wintersemester 2011/12

Name: ______________________ Matrikel-Nr: ______________________

EMail: ______________________ (optionale Schnell-Korrektur)

Als Hilfsmittel sind nur die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten Unterlagen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen) zugelassen. Jegliche Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht gestattet.

1. Gegeben sei die Funktion $f(x)=\frac{81}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(2-0{,}5x)^{-1}}}$ **20 Punkte**

   a) Bestimmen Sie das 4. Taylorpolynom $P_4(x,x_0)$ zu $x_0=2$ (ohne Fehlerabschätzung).
   b) Bestimmen Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich von $f(x)$.
   c) Bestimmen Sie den Wendepunkt von $f(x)$.

2. Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv gegeben mit $a_1=3$, $a_{n+1}=-\frac{1}{3}\cdot(3-2\cdot a_n)$ für $n\geq 1$. **20 Punkte**

   Zeigen Sie:

   a) Die Folge ist streng monoton wachsend oder fallend.
   b) Die Folge besitzt eine obere und eine untere Schranke.
   c) Die Folge ist konvergent.
   d) Berechnen Sie den Grenzwert.

3. Bestimmen Sie folgenden Grenzwert : $\lim\limits_{x\to(2)}\frac{21x-42}{\sqrt{0{,}5x}-\sqrt{3-x}}$ **12 Punkte**

   a) mittels Binomischer Formel
   b) mittels L'Hospital

4. Berechnen Sie die Werte (Grenzwert/ Partialsumme) der folgenden Reihen: **12 Punkte**

   a) $3\cdot\sum\limits_{k=3}^{\infty}\left(\frac{2}{k}\right)^2$ b) $2^3\cdot\sum\limits_{k=5}^{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}$

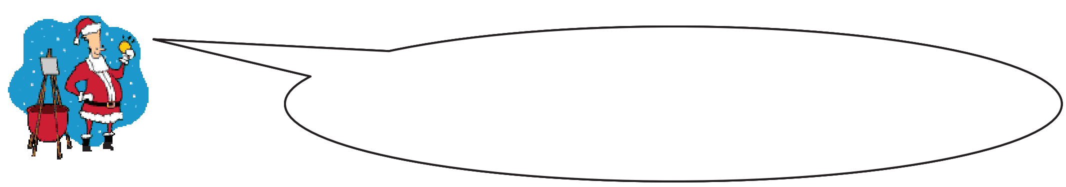
5. Zeigen Sie, dass der Ausdruck $\sum\limits_{k=1}^{n}(3n-2)=\frac{1}{2}n\cdot(3n-1)$ gültig ist. **12 Punkte**

6. Bestimmen Sie von der Funktion $f(x)=5-2\cdot\sin(\frac{2}{3}x+13{,}5\pi)$ **12 Punkte**

   Symmetrie, Periode und Amplituden (Wertebereich).

7. Gegeben ist die folgende ganzrationale Funktion $g(x)=x^3-2x^2-5x+6$ **12 Punkte**

   a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte (x- und y-Achse).
   b) Wie groß ist die Fläche, die von der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird?



1) a) $f(x) = \frac{81}{5} \cdot (2-0{,}5x)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{81}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2-0{,}5x)^{-2/3} = -\frac{27}{10} \cdot (2-0{,}5x)^{-2/3}$

$f''(x) = -\frac{27}{10} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2-0{,}5x)^{-5/3} = -\frac{9}{10} \cdot (2-0{,}5x)^{-5/3}$

$f'''(x) = -\frac{9}{10} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2-0{,}5x)^{-8/3} = -\frac{3}{4} \cdot (2-0{,}5x)^{-8/3}$

$f^{IV}(x) = -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2-0{,}5x)^{-11/3} = -1\,(2-0{,}5x)^{-11/3}$

n	$f^{n}(x_0 = 2)$	$(x-2)^n$	$n!$
0	$81/5$	1	1
1	$-27/10$	$x-2$	1
2	$-9/10$	$(x-2)^2$	2
3	$-3/4$	$(x-2)^3$	6
4	-1	$(x-2)^4$	24

$P_4(x,2) = \frac{81}{5} - \frac{27}{10}(x-2) - \frac{9}{20}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 - \frac{1}{24}(x-2)^4$

b) $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}$

c) $f''(x) = 0$

$-\frac{9}{10} \cdot (2-0{,}5x)^{-5/3} = 0 \quad | \cdot \left(-\frac{10}{9}\right)$

$(2-0{,}5x)^{-5/3} = 0 \quad | \uparrow \left(-\frac{3}{5}\right)$

$2-0{,}5x = 0 \quad | -2 \quad | \cdot (-2)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ f(4) = \frac{81}{5} \cdot (2-0{,}5\cdot 4)^{1/3} = 0 \end{array}\right\} \; WP\,(4\,|\,0)$$

2) $a_{n+1} = -1 + \frac{2}{3} a_n$; $a_1 = 3$; $a_2 = 1$

a) Monotonie : $a_{n+1} < a_n$

$n=1$: $a_2 = 1 < a_1 = 3$ ✓

$n := n+1$: $a_{n+2} < a_{n+1}$

$-1 + \frac{2}{3} a_{n+1} < -1 + \frac{2}{3} a_n \quad | +1 \quad | \cdot \frac{3}{2}$

$a_{n+1} < a_n \quad \Rightarrow$ streng monoton fallend

b) Schranken : $a_1 = 3$ ist obere Schranke

$a_n > -3$ (untere Schranke)

$n=1$: $a_1 = 3 > -3$ ✓

$n := n+1$: $a_n > -3 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} a_n > -2 \quad | -1$

$-1 + \frac{2}{3} a_n > -3 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} > -3$ ✓

c) Konvergenz : Da a_{n+1} streng monoton fallend ist und durch $[-3; 3]$ beschränkt wird, ist sie konvergent.

d) Grenzwert : $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \alpha$

$\alpha = -1 + \frac{2}{3} \alpha \quad | -\frac{2}{3} \alpha$

$\frac{1}{3} \alpha = -1 \quad | \cdot 3$

$\alpha = -3$ //

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{21x - 42}{\sqrt{0{,}5x} - \sqrt{3-x}} = 0/0$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{21 \cdot (x-2)}{\sqrt{0{,}5x} - \sqrt{3-x}} \cdot \dfrac{\sqrt{0{,}5x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{0{,}5x} + \sqrt{3-x}}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{21 \cdot (x-2)\,(\sqrt{0{,}5x} + \sqrt{3-x})}{0{,}5x - (3-x)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{21 \cdot (x-2) \cdot (\sqrt{0{,}5x} + \sqrt{3-x})}{3/2\,(x-2)} = 28$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{21}{\dfrac{0{,}5}{2 \cdot \sqrt{0{,}5x}} - \dfrac{(-1)}{2\sqrt{3-x}}} = \dfrac{21}{\dfrac{0{,}5}{2} + \dfrac{1}{2}} = 21 \cdot \dfrac{2}{1{,}5} = 28$

4) a) $3 \cdot \sum\limits_{k=3}^{\infty} (2/k)^2 = 12 \cdot \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2 - (1 + 1/4) \right] = 12 \cdot \left[\dfrac{\pi^2}{6} - 5/4 \right]$

$= 2\pi^2 - 15$

b) $2^3 \cdot \sum\limits_{k=4}^{19} (1/9)^k = 8 \cdot \left[\dfrac{1 - (1/9)^{21}}{1 - 1/9} - \dfrac{1 - (1/9)^5}{1 - 1/9} \right]$

$= 9 \cdot \left[(1/9)^{21} + (1/9)^5 \right] = (1/9)^{20} + (1/9)^5$

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} (3n-2) = 1/2\, n \cdot (3n-1)$

$n = 1$ $\qquad a_1 = S_1$

$(3 \cdot 1 - 2 = 1 = 1/2 \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)$ ✓

$n \to n+1$ $\qquad S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$

$1/2\, n(3n-1) + (3(n+1) - 2) = 1/2(n+1) \cdot (3(n+1) - 1)$

$3/2\, n^2 - 1/2\, n + 3n + 1 = (1/2\, n + 1/2)\,(3n+2)$

$3/2\, n^2 + 5/2\, n + 1 = 3/2\, n^2 + 5/2\, n + 1$

$0 = 0$ ✓

6) $f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + 13{,}5\pi\right) + 5$

$$\sin\left(\tfrac{2}{3}x + 13{,}5\pi\right) = \sin\left(\tfrac{2}{3}x\right) \cdot \underbrace{\cos(13{,}5\pi)}_{0} + \cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) \cdot \underbrace{\sin(13{,}5\pi)}_{-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot \cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) + 5$$

Symmetrie: Achsensymmetrie $f(x) = f(-x)$

$$2 \cdot \cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) + 5 = 2 \cdot \cos\left(-\tfrac{2}{3}x\right) + 5 \quad \Big| -5 \;\Big| \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) = \cos\left(-\tfrac{2}{3}x\right) \quad \Big| \; \alpha = \tfrac{2}{3}x$$

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) \quad \checkmark$$

Periode: $P_{NEU} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi \qquad f(x) = f(x + 3\pi)$

$$2 \cdot \cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) + 5 = 2 \cdot \cos\left(\tfrac{2}{3}(x + 3\pi)\right) + 5$$

$$= 2 \cdot \cos\left(\tfrac{2}{3}x + 2\pi\right) + 5 \quad \Big| -5 \;\Big| \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) = \cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) \cdot \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - \sin\left(\tfrac{2}{3}x\right) \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{0}$$

$$\cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) = \cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) \quad \checkmark$$

Wertebereich: $2 \cdot [-1; 1] + 5 = [-2; 2] + 5$

$$= [3; 7]$$

$$\Rightarrow W = y \in [3; 7]$$

Musterlösung Nachklausur Mathematik II – FB 2011/12

7) a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \quad ; \; x_1 = 1$

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = \underbrace{x^2 - x - 6}_{(x-3)(x+2)}$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \hline \quad / \quad -x^2 - 5x + 6 \\ \quad -(-x^2 + x) \\ \hline \qquad / \quad -6x + 6 \\ \qquad -(-6x + 6) \\ \hline \qquad\quad / \quad / \end{array}$$

$\Rightarrow S_{x_1} : (1 / 0) \; ; \; S_{x_2} : (-2 / 0) \; ; \; S_{x_3} : (3 / 0)$

$\Rightarrow S_y : (0 / 6)$

b) $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{3} f(x)\, dx = |F(1) - F(-2)| + |F(3) - F(1)|$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$

$F(1) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6 = \frac{3 - 8 - 30 + 72}{12} = \frac{37}{12}$

$F(-2) = 4 + \frac{16}{3} - 10 - 12 = \frac{48 + 64 - 120 - 144}{12} = -\frac{152}{12}$

$F(3) = \frac{81}{4} - 18 - \frac{45}{2} + 18 = \frac{243 - 270}{12} = -\frac{27}{12}$

$\Rightarrow A = \left|\frac{37}{12} - \left(-\frac{152}{12}\right)\right| + \left|-\frac{27}{12} - \frac{37}{12}\right|$

$= \frac{189}{12} + \frac{64}{12}$

$= \frac{253}{12} = 21 \frac{1}{12}$