Torsten Schreiber 04.02.2011

Klausur zum Wintersemester 2010/11

Name: ______________________ EMail: ______________________________

Matrikel-Nr: ______________________ *(zur Schnellkorrektur)*

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen).
Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht gestattet.
(Hinweis: $Q-\{0\}$ sind die rationalen Zahlen ohne Null, $\Re^{+}$ alle reellen Zahlen größer Null)

1. Entscheiden Sie mittels Ranguntersuchungen (inkl. Begründung), für welche $s,t \in Z$ das Gleichungssystem **15 Punkte**

   a) keine Lösung
   b) genau eine Lösungen
   c) unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ -x & - & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & s\cdot z & = & t \end{array}$$

   besitzt.

2. Berechnen Sie $z=\dfrac{(2i)^5\cdot(i+0{,}5)}{4(2i+1)^2}+\dfrac{(4-2i^3)^2}{(i^2+2i)}$ in der Form $z=a+bi;a,b\in Q$. **5 Punkte**

3. Klassifizieren Sie die Relation $\Omega=\left\{(x,y)\in\Re^2 x\Re^2 \mid \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\beta\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\cdot y_1\\\beta\cdot y_2\end{pmatrix},\beta\in\Re^{+}\right\}$. **10 Punkte**
   Welche Art der Relation liegt hier vor (Begründung), was wird durch sie beschrieben?

4. Gegeben sind die beiden Ausdrücke $A_1(a,b,c):=(a\rightarrow(b\leftrightarrow c))\wedge(b\rightarrow a)$ und $A_2(a,b,c):=b\rightarrow a\wedge c$. **10 Punkte**
   Ist die Folgerung von A_1 auf A_2 allgemeingültig ?
   Erstellen Sie hierzu eine Wahrheitstabelle und begründen Sie Ihre Antwort.

5. Gegeben sind die drei Punkte $A=(-3,-2,1)^T$, $B=(1,-1,2)^T$ und $C=(-2,-1,3)^T$ und die Ebene $e_1: 2x-3y+z=-2$. **10 Punkte**
   a) Berechnen Sie die parameterfreie Ebenengleichung e_2 durch A,B,C.
   b) Bestimmen Sie die Parameterform der Schnittgeraden von e_1 und e_2.

6. Gegeben sei die Menge $L=\{a+2b;a,b\in Q-\{0\}\}$ **10 Punkte**
   und der Operator $\sim:=(a_1+2b_1)\sim(a_2+2b_2)=(a_1\cdot a_2-4b_1\cdot b_2)$
   Um welche maximale Struktur handelt es sich bei $(L;\sim)$?

30 Punkte sind Pflicht, ab 42 beginnt die Kür!

Lösung Klausur WS 2010/11 – FB ①

1)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & t \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ |(-3) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & s-9 & t-6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 5 \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & s-4 & t+9 \end{array}\right)$$

a) keine Lösung: $s = 4 \wedge t \neq -9$:

$$\left.\begin{array}{l} Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Rg(A) = 2 \\ \\ Det(A|b) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & t+9 \end{vmatrix} = t+9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Rg(A|b) = 3 \end{array}\right\} \neq$$

b) eine Lösung: $s \neq 4$:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & s-4 \end{vmatrix} = s-4 \neq 0 = Det(A|b)$$

$$\Rightarrow Rg(A) = 3 = Rg(A|b)$$

c) unendliche Lösungen: $s = 4 \wedge t = -9$:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 = Det(A|b)$$

$$\Rightarrow Rg(A) = 2 = Rg(A|b)$$

2)
$$\frac{(2i)^5 (i + 0{,}5)}{4\,(2i+1)^2} = \frac{32 i\,(i + 1/2)}{4\,(4i^2 + 4i + 1)} = \frac{8i\,(i + 1/2)}{(-3 + 4i)} \cdot \frac{(-3-4i)}{(-3-4i)}$$

$$= \frac{(-8 + 4i)(-3-4i)}{9 + 16} = \frac{24 + 16 - 12i + 32i}{25} = 8/5 + 4/5\, i$$

$$\frac{(4 - 2i^3)^2}{i^2 + 2i} = \frac{(4+2i)^2}{(-1+2i)} = \frac{16 + 16i - 4}{(-1+2i)} \cdot \frac{(-1-2i)}{(-1-2i)}$$

$$= \frac{-12 + 32 - 16i - 24i}{1 + 4} = 20/5 - 40/5\, i$$

$$\Rightarrow \quad z = 28/5 - 36/5\, i = 5\tfrac{3}{5} - 7\tfrac{1}{5}\, i$$

3) $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ \beta \in \mathbb{R} \}$

__reflexiv:__ $(x,x) \in \Omega$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 1 \in \mathbb{R}^+ \quad \checkmark$$

__transitiv:__ $(x,y) \in \Omega \wedge (y,z) \in \Omega \Rightarrow (x,z) \in \Omega$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta_1 \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \beta_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \beta_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \beta_3 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix};\ \beta_3 \in \mathbb{R}^+$$

__symmetrie:__ $(x,y) \in \Omega \Leftrightarrow (y,x) \in \Omega$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \beta_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = 1/\beta_2 \in \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow$ Äquivalenzrelation mit den Klassen der linear abhängigen Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

4) $[(a \to (b \leftrightarrow c)) \wedge (b \to a)] \to [b \to a \wedge c]$

a	w	w	w	w	F	F	F	F
b	w	w	F	F	w	w	F	F
c	w	F	w	F	w	F	w	F
$b \leftrightarrow c$	w	F	F	w	w	F	F	w
I. $a \to (b \leftrightarrow c)$	w	F	F	w	w	w	w	w
II. $b \to a$	w	w	w	w	F	F	w	w
I $\wedge$ II	w	F	F	w	F	F	w	w
$a \wedge c$	w	F	w	F	F	F	F	F
$b \to (a \wedge c)$	w	F	w	w	F	F	w	w
$A_1 \to A_2$	w	w	w	w	w	w	w	w

$\Rightarrow E[A] = Bool^3$

Da es sich um eine Tautologie handelt, gilt die Implikation von A_1 auf A_2: $A_1(a,b,c) \Rightarrow A_2(a,b,c)$

5) $A = (-3, -2, 1)^T$; $B = (1, -1, 2)^T$; $C = (-2, -1, 3)^T$

a) $e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 + 3 \\ -1 + 2 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -2 + 3 \\ -1 + 2 \\ 3 - 1 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x - 7y + 3z = d = -3 + 14 + 3 = 14$

$\Rightarrow e_2: \quad x - 7y + 3z = 14$

b) $e_1: \; 2x - 3y + z = -2 \qquad \vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\vec{a}: \left| \begin{array}{l} 2x - 3y + z = -2 \\ x - 7y + 3z = 14 \end{array} \right|$

$y = 0: \quad \left| \begin{array}{l} 2x + z = -2 \\ x + 3z = 14 \end{array} \right| \Rightarrow z = -2 - 2x$

$x + 3 \cdot (-2 - 2x) = 14 \qquad | \, T$

$x - 6 - 6x = 14 \qquad | +6$

$-5x = 20 \qquad | \cdot (-1/5)$

$x = -4$

$z = -2 - 2 \cdot (-4) = 6$

$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

6) $L = \{ a + 2b \;;\; a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \}$

$\sim \; := (a_1 + 2b_1) \sim (a_2 + 2b_2) = (a_1 \cdot a_2 - 4 b_1 \cdot b_2)$

binär: $(a_1 + 2b_1) \sim (a_2 + 2b_2) = \underbrace{a_1 \cdot a_2}_{a_3} + 2 \cdot \underbrace{(-2 b_1 \cdot b_2)}_{b_3}$

$a_3 + 2 \cdot b_3 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow L \times L \to L$

assoziativ: $[(a_1 + 2b_1) \sim (a_2 + 2b_2)] \sim (a_3 + 2b_3)$

$(a_1 \cdot a_2 - 4 b_1 \cdot b_2) \sim (a_3 + 2b_3)$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + 8 b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$

$(a_1 + 2b_1) \sim [(a_2 + 2b_2) \sim (a_3 + 2b_3)]$ =

$(a_1 + 2b_1) \sim (a_2 a_3 - 4 b_2 b_3)$

$a_1 a_2 a_3 + 8 b_1 b_2 b_3$

neutral: $(a + 2b) \sim (x + 2y) = (a + 2b)$

$ax - 4by = a + 2b$

$\Rightarrow x = 1 \;;\; y = -1/2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow 1 = 1 + 2 \cdot (-1/2)$

invers: $(a + 2b) \sim (x + 2y) = 1 + 2 \cdot (-1/2)$

$ax - 4by = 1 + 2 \cdot (-1/2)$

$ax = 1 \;\wedge\; -4by = -1$

$x = 1/a \;\wedge\; y = 1/4b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \overline{(a + 2b)} = 1/a + 2 \cdot 1/4b = 1/a + 1/2b$

Kommutativ: $(a_1 + 2b_1) \sim (a_2 + 2b_2) = a_1 a_2 - 4 b_1 b_2$

$(a_2 + 2b_2) \sim (a_1 + 2b_1) = a_2 a_1 - 4 b_2 b_1$ =

$\Rightarrow$ Es handelt sich um eine abelsche Gruppe.