Klausur (Mathematik II) - Sommersemester 2013

Name: ______________________________ Matrikel-Nr: ________________

EMail: ____ (optionale Schnell-Korrektur)

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Punkte	10	12	10	10	10	16	12	20

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen).
Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht gestattet.

1. Begründen Sie, ob es sich bei $\therefore$ um eine Ordnungs- oder um eine Äquivalenzrelation (inkl. der Äquivalenzklassen) handelt.
   Was wird durch die gegebene Relation beschrieben?
   $$\therefore = \{(a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2 \cdot a \leq 2 \cdot b + 1\}$$

2. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion den folgenden Zusammenhang.
   $$(1+\beta)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot \beta; n \geq 1 \wedge 0 \leq \beta \leq 1$$

3. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3}\left(\frac{9x-27}{(\sqrt{2\cdot(5+x)}-(x+1))}\right)$ auf zwei Arten, mittels
   a) Erweiterung durch das 3. Binom.
   b) Regel von L'Hospital.

4. Wie müssen die beiden Parameter $a; b \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit die Funktion sowohl stetig als auch differenzierbar ist?
   $$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + b + 1; x \geq 0 \\ b \cdot e^x + a \cdot e^{-x} + 4x; x < 0 \end{cases}$$

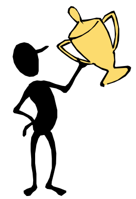
5. Bestimmen Sie die Fläche, die von der Funktion $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 24x - 32$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

6. Die Folge a_n sei rekursiv gegeben mit $2 \cdot (a_{n+1} - 2) = 2 \cdot a_n + 6 - a_{n+1}; a_1 = 20, n \geq 1$.
   Zeigen Sie:
   a) Die Folge ist streng monoton wachsend oder fallend.
   b) Die Folge besitzt eine obere und untere Schranke.
   c) Die Folge ist konvergent.
   d) Berechnen Sie den Grenzwert.

7. Untersuchen Sie die gegebenen Reihen auf Konvergenz (Begründung):
   a) $\sum \frac{n!}{n^n}$ b) $42 \cdot \sum \left(\frac{n+1}{9n}\right)^n$

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{4-2x}}{2} - e \cdot x^2\right)$.
   a) Geben Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich an (Begründung).
   b) Berechnen Sie das 4. Taylorpolynom $P_4(x,2)$ (ohne Fehlerabschätzung)
   c) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

Mit einem Tripel gebe ich mich nicht zufrieden, ich erwarte mehr von Ihnen!!!!!



Torsten Schreiber 19.07.2013

Lückentext (Mathematik II) zum Sommersemester 2013

Name: ____________________ Matrikel-Nr.: ____________________

Mit diesem Lückentext können Sie bis zu maximal 10 mögliche Zusatzpunkte erlangen.
Für jedes richtig eingetragene Wort ergibt sich somit ein Bonuspunkt.

Bei einer **Funktion** darf zu jedem x-Wert maximal nur ein y-Wert gehören.

Wenn der Graph einer Funktion in einem durchgezeichnet (keine Lücken oder Sprungstellen) werden kann, dann ist er auf jeden Fall **stetig**.

Eine Summenreihe kann nur dann konvergent wenn die zugehörige Folge eine **Nullfolge** ist.

Eine rekursive Folge ist immer von dem jeweiligen **Vorgänger** abhängig.

Der Ausdruck hinter einem Logarithmus muss stets **größer gleich** Null sein

Die zweite Ableitung beschreibt die **Krümmung** einer Funktion, so dass dadurch die **Wendestellen**der Funktion berechnet werden können.

Bei der Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion handelt es sich um eine Verschiebung in Richtung der **x-Achse.**

Handelt es sich bei dem Grenzwert deiner Funktion nicht um eine Zahl, sondern um die Unendlichkeit, so spricht man **Divergenz**

Grundsätzlich darf ein Integral nie über die Schnittstellen mit der **x-Achse** gebildet werden.

Wendestellen **größer** **y-Achse** **Krümmung** **y-Achse**

stetig **Funktion** **x-Achse** **Rekursive Folge** **Vorgänger** **Konvergenz**

Divergenz **Steigung** **Nachfolger** **größer gleich** **x-Achse**

Nullfolge **Extremstellen** **Relation** **differenzierbar**

Musterlösung Klausur Mathematik II Sommersemester 2013

1) $\therefore = \{(a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2 \cdot a \leq 2 \cdot b + 1\}$

reflexiv: $(a;a) \in \therefore, a \in \mathbb{Z}$
$2 \cdot a \leq 2 \cdot a + 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1$

transitiv: $(a;b) \in \therefore \wedge\ (b;c) \in \therefore\ ;\ a,b,c \in \mathbb{Z}$
$2 \cdot a \leq 2 \cdot b + 1 \wedge 2 \cdot b \leq 2 \cdot c + 1 \Leftrightarrow 2 \cdot a \leq (2 \cdot c + 1) + 1$
$2 \cdot a \leq 2 \cdot c + 2 \Rightarrow 2 \cdot a \leq 2 \cdot c + 1$

antisymmetrisch: $(a;b) \in \therefore \wedge\ (b;a) \in \therefore \Rightarrow a = b\ ;\ a,b \in \mathbb{Z}$
$2 \cdot a \leq 2 \cdot b + 1 \Leftrightarrow -2 \cdot b \leq -2 \cdot a + 1 \Leftrightarrow 2 \cdot b \geq 2 \cdot a - 1$

Es muss sich also um eine Ordnungsrelation handeln und wenn $(a;b) \notin \therefore$ muss $(a;b) \in \therefore$ gelten.
Also handelt es sich auch um eine totale Ordnungsrelation.
Die Relation beschreibt alle geraden Zahlen, die kleiner gleich der zugehörigen ungeraden Zahl ist.

2) $(1+\beta)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot \beta; n \geq 1 \wedge 0 \leq \beta \leq 1$

Induktionsanfang:
$n = 1$: $(1+\beta)^1 \leq 1 + (2^1 - 1) \cdot \beta \Leftrightarrow 1 + \beta \leq 1 + \beta$

Induktionsschluss:
$n = n + 1$: $(1+\beta)^{n+1} \leq 1 + (2^{n+1} - 1) \cdot \beta$
$(1+\beta)^1 \cdot (1+\beta)^n \leq 1 + (2^{n+1} - 1) \cdot \beta$
$(1+\beta) \cdot (1 + (2^n - 1) \cdot \beta) \leq 1 + (2^{n+1} - 1) \cdot \beta$
$1 + (2^n - 1) \cdot \beta + \beta + (2^n - 1) \cdot \beta^2 \leq 1 + (2^{n+1} - 1) \cdot \beta$
$\beta \cdot (2^n - 1 + 1 + (2^n - 1) \cdot \beta) \leq (2^{n+1} - 1) \cdot \beta;\ \beta \geq 0$
$2^n + (2^n - 1) \cdot \beta \leq 2 \cdot 2^n - 1$
$(2^n - 1) \cdot \beta \leq 2^n - 1 \Leftrightarrow \beta \leq 1$

3) a)
$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{9x-27}{(\sqrt{2\cdot(5+x)}-(x+1)}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{9x-27}{(\sqrt{2\cdot(5+x)}-(x+1)}\cdot\frac{(\sqrt{2\cdot(5+x)}+(x+1)}{(\sqrt{2\cdot(5+x)}+(x+1)}\right)$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{9\cdot(x-3)\cdot(\sqrt{2\cdot(5+x)}+(x+1)}{2\cdot(5+x)-(x+1)^2}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{9\cdot(x-3)\cdot(\sqrt{2\cdot(5+x)}+(x+1)}{-x^2+9}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{9\cdot(x-3)\cdot(\sqrt{2\cdot(5+x)}+(x+1)}{-(x-3)\cdot(x+3)}\right)$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{9\cdot(\sqrt{2\cdot(5+x)}+(x+1)}{-(x+3)}\right)=\frac{9\cdot(4+4)}{-6}=\frac{72}{-6}=-12$$

b)
$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{9x-27}{(\sqrt{2\cdot(5+x)}-(x+1)}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{9}{\frac{2}{2\cdot\sqrt{10+2x}}-1}\right)=\frac{9}{\frac{1}{4}-1}=\frac{9}{-\frac{3}{4}}=-12$$

4)
$$f(x)=\begin{cases}a\cdot\sin x+b\cdot\cos x+b+1; x\geq 0\\ b\cdot e^{x}+a\cdot e^{-x}+4x; x<0\end{cases}\Rightarrow 2b+1=b+a\Leftrightarrow a-b=1\Leftrightarrow a=1+b$$

$$f'(x)=\begin{cases}a\cdot\cos x-b\cdot\sin x; x\geq 0\\ b\cdot e^{x}-a\cdot e^{-x}+4; x<0\end{cases}\Rightarrow a=b-a+4\Leftrightarrow 2a-b=4\Leftrightarrow 2\cdot(1+b)-b=4\Leftrightarrow b=2\wedge a=3$$

5) $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 24x - 32 = 4 \cdot (x+4) \cdot (x+1) \cdot (x-2)$

$$\int_{-4}^{-1} \left(4x^3 + 12x^2 - 24x - 32\right) dx + \int_{-1}^{2} \left(4x^3 + 12x^2 - 24x - 32\right) dx = \left|F(-1) - F(-4)\right| + \left|F(2) - F(-1)\right|$$
$$F(x) = x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32x$$
$$F(-4) = 256 - 256 - 192 + 128 = 64$$
$$F(-1) = 1 - 4 - 12 + 32 = 17$$
$$F(2) = 16 + 32 - 48 - 64 = -64$$
$$\int_{-4}^{-1} \left(4x^3 + 12x^2 - 24x - 32\right) dx = \left|17 + 64\right| = 81$$
$$\int_{-1}^{2} \left(4x^3 + 12x^2 - 24x - 32\right) dx = \left|-64 - 17\right| = 81$$

Die Fläche zwischen der Funktion und er x-Achse beträgt 162 FE.

6) $2 \cdot \left(a_{n+1} - 2\right) = 2 \cdot a_n + 12 - a_{n+1}; a_1 = 20, n \geq 1$

$$2 \cdot a_{n+1} - 4 = 2 \cdot a_n + 6 - a_{n+1} \Leftrightarrow 3 \cdot a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 10 \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot a_n + 10\right)$$

a) Monotonie:

Behauptung: $a_{n+1} < a_n$ (streng monoton fallend)

Induktionsanfang:

$n = 1$: $a_1 = 20 < \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} = a_2$

Induktionsschluss:

$n = n+1$: $a_{n+2} < a_{n+1}$

$\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a_{n+1} + 10) < \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a_n + 10)$

$2 \cdot a_{n+1} + 10 < 2 \cdot a_n + 10$

$2 \cdot a_{n+1} < 2 \cdot a_n$

$a_{n+1} < a_n$

b) Schranken: Da die Folge streng monoton fallend ist muss $a_1 = 20$ eine obere Schranke sein.

Behauptung: $a_n > 0$ (untere Schranke)

Induktionsanfang:

$n = 1$: $a_1 = 20 > 0$

Induktionsschluss:

$n = n+1$: $a_{n+1} > 0$

$a_n > 0$

$2 \cdot a_n > 0$

$2 \cdot a_n + 10 > 10$

$\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a_{n+1} + 10) > \frac{10}{3}$

$\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a_{n+1} + 10) = a_{n+1} > 3\frac{1}{3} > 0$

c) Konvergenz: Da die Folge streng monoton fallend ist und durch das Intervall $]0; 20]$ beschränkt ist, muss sie konvergent sein und der Grenzwert existieren.

d) Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

$\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \alpha + 10) = \alpha \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha + 10 = 3 \cdot \alpha \Leftrightarrow \propto = 10$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 10 \in]0; 20]$

7) a) $\sum \frac{n!}{n^n}$ Quotientensatz

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}\cdot\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{n^n}{\left(n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}\cdot\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{n^n}{n^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)=\frac{1}{e}<1$$

b) $42\cdot\sum\left(\frac{n+1}{9n}\right)^n$ Wurzelsatz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{9n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{9n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{9n}=\frac{1}{9}<1$$

8) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{4-2x}}{2}-e\cdot x^2\right)=\frac{1}{4}\cdot e^{4-2x}-\frac{e}{2}\cdot x^2$

a) Definitionsbereich:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{4}\cdot e^{4-2x}-\tfrac{e}{2}\cdot x^2\right)=0-\infty=-\infty$$
$$\lim_{n\to-\infty}\left(\tfrac{1}{4}\cdot e^{4-2x}-\tfrac{e}{2}\cdot x^2\right)=\infty-\infty=\infty$$
$$\Rightarrow \mathbb{D}=\mathbb{R};\ \mathbb{W}=\mathbb{R}$$

b) Taylorpolynom:

$$f'(x)=-\tfrac{1}{2}\cdot e^{4-2x}-e\cdot x$$
$$f''(x)=e^{4-2x}-e$$
$$f'''(x)=-2e^{4-2x}$$
$$f''''(x)=4e^{4-2x}$$

n	$f^n(2)$	$(x-2)^n$	$n!$
0	$\frac{1}{4}-2e$	1	1
1	$-\frac{1}{2}-2e$	$x-2$	1
2	$1-e$	$(x-2)^2$	2
3	-2	$(x-2)^3$	6
4	4	$(x-2)^4$	24

$$P_4(x,2)=\frac{1}{4}-2-\left(\frac{1}{2}+2e\right)\cdot(x-2)+\frac{1}{2}\cdot(1-e)\cdot(x-2)^2-\frac{1}{3}\cdot(x-2)^3+\frac{1}{6}\cdot(x-2)^4$$

c) Wendetangente:

$$f''(x)=e^{4-2x}-e=0\Leftrightarrow e=e^{4-2x}\Leftrightarrow 1=4-2x\Leftrightarrow x=\tfrac{3}{2}$$
$$f'\left(\tfrac{3}{2}\right)=-\tfrac{1}{2}\cdot e^{4-3}-e\cdot\tfrac{3}{2}=-2e$$
$$f\left(\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{1}{4}\cdot e^{4-3}-\tfrac{e}{2}\cdot\tfrac{9}{4}=\tfrac{2}{8}e-\tfrac{9}{8}e=-\tfrac{7}{8}e$$

$$-\tfrac{7}{8}e=-2e\cdot\tfrac{3}{2}+b\Longrightarrow b=-\tfrac{7}{8}e+3e=\tfrac{17}{8}e$$

$$y=-2e\cdot x+2\tfrac{1}{8}$$