Klausur (Mathematik I) - Sommersemester 2012

Name: ______________________________ Matrikel-Nr: __________________________

EMail: ____ (optionale Schnell-Korrektur)

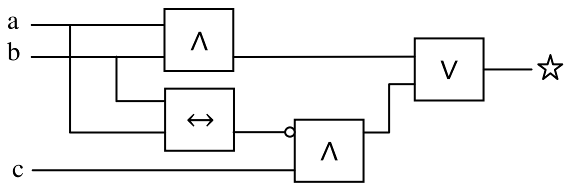
Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	12	12	16	20	20	20

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen).
Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht gestattet.

1. Gegeben sind die Menge A mit $A = \{-25; -20; -15; -5; 0; 5; 10; 15; 20; 25; 35\}$ und die Menge B der ganzen Zahlen (größer gleich -30 und kleiner als 42), die sowohl durch 5 als auch durch 2 teilbar sind.
   Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

   a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \backslash B$ d) $B \backslash A$

2. Prüfen Sie, ob die gegebene Schaltung zu der Aussage $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ äquivalent ist (Begründung).



3. Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Gleichungen und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form z=a+bi an.
   Bestimmen Sie bei Aufgabe a) zusätzlich noch den Betrag und das Argument.

   a) $z = \frac{10i}{4i-2} - \frac{15+5i}{1+3i}$ b) $z = \frac{7}{20} i^3 \cdot \left[\left(3-2i^3\right)^4 - 1 \right]$

4. Gegeben sind die beiden Punkte $A = (1;3;-2)^T$ und $B = (3;4;-1)^T$ und die Ebene mit $e: 2x - 3y + z = -5$.

   a) Bestimmen Sie die Geradengleichung durch die beiden Punkte A und B und geben Sie die Parameterdarstellung der Ebene an.
   b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

5. Gegeben ist die folgende Gleichung: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

   a) Bestimmen Sie den Lösungsvektor mittels der inversen Matrix.
   b) Verifizieren Sie ihr Ergebnis unter Verwendung der Cramer'schen Regel.

6. Das folgende lineare Gleichungssystem ist auf seine Lösungsmannigfaltigkeit zu untersuchen. Entscheiden Sie mit Hilfe der Ranguntersuchungen nach Frobenius, für welche $a, b \in Z$ das System

   a) i) genau eine Lösung
   ii) unendlich viele Lösungen
   iii) keine Lösung
   besitzt.

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & = & -4 \\ 2 \cdot x_1 & + & a \cdot x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & b \end{array} \right|$$

   b) Für den Fall ii) geben Sie die Lösungsmenge in Parameterform an.

Auch Sie können sich die Meisterschaft holen!!!!!

Musterlösung Klausur Mathematik 1 2012 (Friedberg)

1) Menge A: $A = \{-25; -20; -15; -5; 0; 5; 10; 15; 20; 25; 35\}$
Menge B: $B = \{-30; -20; -10; 0; 10; 20; 30; 40\}$

a) $A \cap B$: $\{-20; 0; 10; 20\}$
$\{x \in Z\backslash\{-10\} | (x \geq -20 \wedge x \leq 20) \wedge x mod 10 = 0\}$

b) $A \cup B$: $\{-30; -25; -20; -15; -10; -5; 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40\}$
$\{x \in Z | (x \geq -30 \wedge x \leq 40) \wedge x mod 5 = 0\}$

c) $A\backslash B$: $\{-25; -15; -5; 5; 15; 25; 35\}$
$\{x \in Z | (x \geq -30 \wedge x \leq 35) \wedge (x mod 5 = 0 \wedge x mod 2 <> 0\}$

d) $B\backslash A$: $\{-30; -10; 30; 40\}$
$\{x \in Z\backslash\{-20; 0; 10; 20\} | (x \geq -30 \wedge x \leq 40) \wedge x mod 10 = 0\}$

2) Formel 1 für die Schaltung: $A_1(a,b,c) = (a \wedge b) \vee (\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c)$
Formel 2 (gegeben): $A_2(a,b,c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

Es ist die Äquivalenz zu zeigen: $(a \wedge b) \vee (\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

Wahrheitstabelle:

a	W	W	W	W	F	F	F	F
b	W	W	F	F	W	W	F	F
c	W	F	W	F	W	F	W	F
$(a \wedge b)$	W	W	F	F	F	F	F	F
$(a \leftrightarrow b)$	W	W	F	F	F	F	W	W
$\neg(a \leftrightarrow b)$	F	F	W	W	W	W	F	F
$\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c$	F	F	W	F	W	F	F	F
$(a \wedge b) \vee (\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c)$	**W**	**W**	**W**	**F**	**W**	**F**	**F**	**F**
$(a \wedge b)$	W	W	F	F	F	F	F	F
$(a \wedge c)$	W	F	W	F	F	F	F	F
$(b \wedge c)$	W	F	F	F	W	F	F	F
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$	**W**	**W**	**W**	**F**	**W**	**F**	**F**	**F**
$A_1(a,b,c) \leftrightarrow A_2(a,b,c)$	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**

Es gilt $E[A] = Bool^3$ und somit handelt es sich um eine Tautologie, wodurch die Äquivalenz der Aussagen bzgl. der Schaltung gilt: $A_1(a,b,c) \Leftrightarrow A_2(a,b,c)$

3) a) $z=\frac{10i}{4i-2}-\frac{15+5i}{1+3i}=\frac{10i}{4i-2}\cdot\frac{4i+2}{4i+2}-\frac{15+5i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}=\frac{10i\cdot(4i+2)}{(4i)^2-2^2}-\frac{(15+5i)\cdot(1-3i)}{1^2-(3i)^2}$

$z=\frac{-40+20i}{-20}-\frac{15+5i-45i-15i^2}{10}=\frac{-40+20i}{-20}-\frac{30-40i}{10}=\frac{40-20i-60+80i}{20}$

$z=\frac{60}{20}i-\frac{20}{20}=3i-1$

Betrag: $\Rightarrow r=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ Argument: $\Rightarrow \alpha=\arctan(-3)+2\pi$

b) $z=\frac{7}{20}i^3\cdot\left[(3-2i^3)^4-1\right]=-\frac{7}{20}i\cdot\left[(3+2i)^4-1\right]$

$(3+2i)^4=1\cdot 3^4\cdot(2i)^0+4\cdot 3^3\cdot(2i)^1+6\cdot 3^2\cdot(2i)^2+4\cdot 3^1\cdot(2i)^3+1\cdot 3^0\cdot(2i)^4$
$(3+2i)^4=81+216i-216-96i+16=120i-119$

$z=-\frac{7}{20}i\cdot[(120i-119)-1]=-\frac{7}{20}i\cdot(120i-120)=42+42i$

4) a) $e: 2x-3y+z=-5$ und $A=(1;3;-2)^T; B=(3;4;-1)^T$

Geradengleichung: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}3-1\\4-3\\-1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Ebenengleichung: $e: 2x-3y+z=-5$

$$\left.\begin{aligned}P_1&=(-1;1;0)^T\\P_2&=(3;2;-5)^T\\P_3&=(0;2;1)^T\end{aligned}\right\}\quad \textit{Punkte auf der Ebene}$$

$e:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}3+1\\2-1\\-1+0\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}0+1\\2-1\\1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b) Schnittpunkt: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\alpha\\3+1\alpha\\-2+1\alpha\end{pmatrix}\wedge e: 2x-3y+z=-5$

$2\cdot(1+2\alpha)-3\cdot(3+\alpha)+(-2+\alpha)=2+4\alpha-9-3\alpha-2+\alpha=2\alpha-9=-5$

$\Rightarrow \alpha=2\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4\\3+2\\-2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$

5) a) $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 15+5-4 \\ - \\ 5+20+3 \end{matrix} = 21-28 = -6 \neq 0$ regulär, so dass die Inverse existiert

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5+1 & -(-4+1) & -4-5 \\ -(-5-1) & 3-1 & -(3+5) \\ 5-5 & -(-3+4) & 15-20 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -9 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -9 & -8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0-18+0 \\ 0-6-6 \\ 0+24-30 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Lösungsvektor lautet $\vec{x} = (3; 2; 1)^T$

b) Cramer-Verfahren:

$\det(A) = -6$

$$Det_1(A) = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 0+30-3 \\ - \\ 30+15+0 \end{matrix} = 27-45 = -18 \Rightarrow x_1 = \frac{Det_1(A)}{Det(A)} = \frac{-18}{-6} = 3$$

$$Det_2(A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -9+0-24 \\ - \\ -3+0+-18 \end{matrix} = -33+21 = -12 \Rightarrow x_2 = \frac{Det_2(A)}{Det(A)} = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$Det_3(A) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 90+15+0 \\ - \\ 0+120-9 \end{matrix} = 105-111 = -6 \Rightarrow x_3 = \frac{Det_3(A)}{Det(A)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Da der gleiche Lösungsvektor $\vec{x} = (3; 2; 1)^T$ als Ergebnis herauskommt, ist die Verifizierung positiv durchgeführt worden.

6) $\left|\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & -4 \\ 2\cdot x_1 & + & a\cdot x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & b \end{array}\right|$

$$\left|\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & -4 \\ 2\cdot x_1 & + & a\cdot x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & b \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \mid \cdot (-2) \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \mid \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccccc} x_1 - & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & -4 \\ & (a+4)\cdot x_2 & - & 5\cdot x_3 & = & 10 \\ & 4\cdot x_2 & - & 1\cdot x_3 & = & 4+b \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \mid \cdot (-5) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccccc} x_1 - & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & -4 \\ & (a+4)\cdot x_2 & - & 5\cdot x_3 & = & 10 \\ & (a-16)\cdot x_2 & & & = & -10-5\cdot b \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cccccc} x_1 & + & 3\cdot x_3 & - & 2\cdot x_2 & = & -4 \\ & - & 5\cdot x_3 & + & (a+4)\cdot x_2 & = & 10 \\ & & & & (a-16)\cdot x_2 & = & -10-5\cdot b \end{array}\right|$$

a) (i) $a \neq 16: \det(A) = -5\cdot(a-16) \neq 0 \Rightarrow Rg(A) = 3 = Rg(A|b)$

(ii) a$= 16 \wedge b = -2: \det(A) = -5 \neq 0 \Rightarrow Rg(A) = 2 = Rg(A|b)$

(iii) $a = 16 \wedge b \neq -2: \det(A) = -5 \neq 0 \wedge \det(A|b) = -5\cdot(-5b-10) \neq 0$
$\Rightarrow Rg(A) = 2 \neq 3 = Rg(A|b)$

b) (ii) a$= 16 \wedge \mathrm{b} = -2: \det(\mathrm{A}) = -5 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Rg(A)} = 2 = \mathrm{Rg(A|b)}$

$$\left|\begin{array}{cccccc} x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & -4 \\ & & 20\cdot x_2 & - & 5\cdot x_3 & = & 10 \\ 0 & & 0 & & 0 & = & 0 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{c} x_1 - 2\cdot\gamma + 3\cdot(-2+4\cdot\gamma) = -4 \Rightarrow x_1 = 2-10\cdot\gamma \\ 20\cdot\gamma - 5\cdot x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = -2+4\cdot\gamma \\ x_2 = \gamma \end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2-10\cdot\gamma \\ 0+\gamma \\ -2+4\cdot\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10\gamma \\ 0 & \gamma \\ -2 & 4\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma\cdot\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$