Klausur zum Wintersemester 2013/14

Name: ______________________________ Matrikel-Nr: ________________

EMail: ______________________________ (optionale Schnell-Korrektur)

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Punkte	12	12	12	12	10	16	12	14

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen).
Die Verwendung von Büchern und elektronischen Hilfsmitteln ist nicht erlaubt.

1. Gegeben sind die Menge A aller ungeraden Zahlen im Intervall von $[1;20]$ sowie die Menge B der natürlichen Zahlen (größer 1 und kleiner 21), die durch 2 oder durch 3 teilbar sind.
   Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung und 2 mal Eigenschaften):

   a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \backslash B$ d) $B \backslash A$

2. Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Gleichungen und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form z=a+bi an.
   Bestimmen Sie für beide Aufgaben zusätzlich noch den Betrag und das Argument.

   a) $z^2 + (4i-5)\cdot z = 2\cdot(2+5i)$ b) $\frac{1+2i}{2+i} - \frac{3-i}{4-3i} + \frac{3}{5}\cdot(i+3)$

3. Vereinfachen Sie die folgenden Terme und fassen Sie das Ergebnis zusammen.

   a) $\frac{\sqrt[4x]{\left(n^{6x-4}\right)^2}}{\sqrt[x]{n^{4-3x}}} : \frac{\sqrt[x]{\sqrt{n^{4x-5}}}}{\sqrt[2x]{n^{2x+7}}}$ b) $\frac{16\cdot\left(2x^{-3}y^2z^4\right)^{-2}}{0,5\cdot\left(4x^{-1}y^{-4}z^{-6}\right)^3} \cdot \frac{64\cdot\left(0,25x^{-4}y^5z^{-2}\right)^{-3}}{2^{-5}\cdot\left(16x^5y^{-2}z^4\right)^4}$

   c) $5\cdot\left(4^{ld3} + \log\frac{1}{1000}\right) + 12\cdot\ln\left(\sqrt[3]{e^2}\right) + 2\cdot\left(0,001^{\log 0,5} - e^{0,5\cdot\ln 9} + ld\left(\frac{1}{8}\right)\right)$

4. Berechnen Sie die zugehörigen Lösungsmengen und geben den Definitionsbereich an.

   a) $x = 3 + \sqrt{3x-5}$ b) $\frac{(2x+4)^2}{4} = (-3)\cdot\frac{x+6-x^2}{x-3}$

5. Berechnen Sie den Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen.

   a) $|9-3x| > 2\cdot(x+2)$ b) $4\cdot\frac{5-x^2}{6-2x} \geq 2x+5$

6. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 5}\left(\frac{3x-15}{(2x-6)-\sqrt{4\cdot(x-1)}}\right)$.

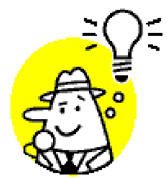
   a) Erweiterung durch 3. Binom.
   b) Regel von L'Hospital

7. Bestimmen Sie von der folgenden Funktion den Wertebereich und beweisen Sie zusätzlich die Periode und die Symmetrie.

$$f(x) = 2\cdot\left(4,5 - 1,5\cdot\cos^4(0,25x + 7,5\pi)\right) - 5$$

8. Bestimmen Sie die Fläche, die zwischen den Funktionen $f(x) = x^3 + x^2 + 4$ und $g(x) = (x+2)^2$ liegt.

Sie werden nicht nur sehen und staunen,
sondern mit Logik auch erfolgreich sein!



Torsten Schreiber 10.02.2014

Lückentext (Mathematik) zum Wintersemester 2013/14

Name: ____________________ Matrikel-Nr.: ____________________

Mit diesem Lückentext können Sie bis zu maximal 10 mögliche Zusatzpunkte erlangen.
Für jedes richtig eingetragene Wort ergibt sich somit ein Bonuspunkt.

Die Schnittmenge zwischen zwei Mengen erhalten Sie durch die **UND**-Verknüpfung.

Steht vor einer Variablen eine Zahl, so wird diese auch als **Koeffizient** bezeichnet.

Unter dem **Argument** einer komplexen Zahl versteht man den Winkel, der stets zur **positiven** x-Achse bestimmt wird.

Bei einer Sinus-Funktion kann durch den Faktor vor dem x die **Periode** verändert werden.
Den höchsten bzw. tiefsten Punkt einer solchen Funktion bezeichnet man als **Amplitude**.

Mit dem Differenzenquotient kann die **Steigung** zwischen zwei Punkten berechnet werden.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse wird auch **Achsenabschnitt** genannt.

Ist die zweite Ableitung positiv, dann handelt es sich um eine **Linkskrümmung**.

Wenn Sie die **Ableitung** der Stammfunktion bilden, erhalten Sie stets die Integrandfunktion.

Argument **Linkskrümmung** **Oder** **Achsenabschnitt** **Periode**

Ableitung **Und** **Krümmung** **Koeffizient** **Amplitude** **positiven**

Nullstelle **Phasenverschiebung** **Betrag** **Aufleitung** **Steigung**

Parameter **Frequenz** **negativen** **Linkskrümmung**

Musterlösung Klausur Mathematik 2013/ 14 (Fulda)

1) Menge A: $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19\}$
Menge B: $B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20\}$

a) $A \cap B$: $\{3; 9; 15\}$

b) $A \cup B$: $\{x \in \mathbb{N} | x \geq 1 \wedge x \leq 20\}$

c) $A \backslash B$: $\{x \in \mathbb{N} \backslash \{3; 9; 15\} | x mod 2 <> 0 \wedge (x \geq 1 \wedge x \leq 20)\} = \{1; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$

d) $B \backslash A$: $\{x \in \mathbb{N} | x mod 2 = 0 \wedge (x \geq 1 \wedge x \leq 20)\}$
$\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$

2) a) $z^2 + (4i-5) \cdot z = 2 \cdot (2+5i) \Leftrightarrow z^2 + (4i-5) \cdot z - (4+10i) = 0$

$$z_{1,2} = -\frac{4i-5}{2} \pm \sqrt{\frac{(4i-5)^2}{4} + 4 + 10i}$$

$$z_{1,2} = -2i + \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{(16i^2 - 40i + 25)}{4} + 4 + 10i} = -2i + \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{(9-40i) + 16 + 40i}{4}} = -2i + \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -2i + \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$z_1 = -2i$
$z_2 = -2i + 5$

<u>Betrag</u>: $\Rightarrow z_1 : r = \sqrt{(-2)^2} = 2$
$\Rightarrow z_2 : r = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

<u>Argument</u>: $\Rightarrow z_1 : \alpha = 270° = \frac{3}{2}\pi$
$\Rightarrow z_2 : \alpha = \arctan\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi$

b) $$\frac{1+2i}{2+i} - \frac{3-i}{4-3i} + \frac{3}{5} \cdot (i+3) = \frac{1+2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} - \frac{3-i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} + \frac{3 \cdot (i+3)}{5}$$

$$\frac{2+4i-i-2i^2}{4-i^2} - \frac{12-4i+9i-3i^2}{16-9i^2} + \frac{3i+9}{5}$$

$$\frac{4+3i}{5} - \frac{15+5i}{25} + \frac{3i+9}{5} = \frac{4+3i-3-i+3i+9}{5} = \frac{10+5i}{5} = 2+i$$

<u>Betrag</u>: $\Rightarrow z : r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

<u>Argument</u>: $\Rightarrow z : \alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 0\pi$

3) a) $\frac{\sqrt[4x]{\left(n^{6x-4}\right)^2}}{\sqrt[x]{n^{4-3x}}}:\frac{\sqrt[x]{\sqrt{n^{4x-5}}}}{\sqrt[2x]{n^{2x+7}}}=\frac{\sqrt[4x]{\left(n^{6x-4}\right)^2}}{\sqrt[x]{n^{4-3x}}}\cdot\frac{\sqrt[2x]{n^{2x+7}}}{\sqrt[x]{\sqrt{n^{4x-5}}}}=n^{\frac{6x-4}{2x}-\frac{4-3x}{x}+\frac{2x+7}{2x}-\frac{4x-5}{2x}}=n^{\frac{6x-4-8+6x+2x+7-4x+5}{2x}}=n^{\frac{10x}{2x}}=n^5$

b) $\frac{16\cdot\left(2x^{-3}y^2z^4\right)^{-2}}{0{,}5\cdot\left(4x^{-1}y^{-4}z^{-6}\right)^3}\cdot\frac{64\cdot\left(0{,}25x^{-4}y^5z^{-2}\right)^{-3}}{2^{-5}\cdot\left(16x^5y^{-2}z^4\right)^4}=\frac{16\cdot 2^{-2}x^6y^{-4}z^{-8}}{0{,}5\cdot 2^6x^{-3}y^{-12}z^{-18}}\cdot\frac{64\cdot 2^6x^{12}y^{-15}z^6}{2^{-5}\cdot 2^{16}x^{20}y^{-8}z^{16}}$

$\frac{2^4\cdot 2^{-2}\cdot 2^6\cdot 2^6\cdot x^{18}\cdot y^{-19}\cdot z^{-2}}{2^{-1}\cdot 2^6\cdot 2^{-5}\cdot 2^{16}\cdot x^{17}\cdot y^{-20}\cdot z^{-2}}=\frac{2^{14}\cdot x}{2^{16}\cdot y^{-1}}=\frac{1}{4}xy$

c) $5\cdot\left(4^{ld3}+\log\frac{1}{1000}\right)+12\cdot\ln\left(\sqrt[3]{e^2}\right)+2\cdot\left(0{,}001^{\log 0{,}5}-e^{0{,}5\cdot\ln 9}+ld\left(\frac{1}{8}\right)\right)$

$5\cdot\left(2^{2ld3}+\log 10^{-3}\right)+12\cdot\ln e^{\frac{2}{3}}+2\cdot\left(10^{-3\cdot\log 0{,}5}-e^{\ln 3}+ld2^{-3}\right)$

$5\cdot(9-3)+12\cdot\frac{2}{3}+2\cdot(8-3-3)=30+8+4=42$

4) a) $x=3+\sqrt{3x-5};D=\left\{x\in\Re\mid x\geq\frac{5}{3}\right\}$

$x-3=\sqrt{3x-5}\Leftrightarrow(x-3)^2=3x-5\Leftrightarrow x^2-6x+9=3x-5$

$x^2-9x+14=(x-2)\cdot(x-7)=0\Rightarrow L=\{2;7\}$

b) $\frac{(2x+4)^2}{4}=(-3)\cdot\frac{x+6-x^2}{x-3};D=\Re\{3\}$

$(2x+4)^2\cdot(x-3)=-12\cdot\left(x+6-x^2\right)\Leftrightarrow\left(4x^2+16x+16\right)\cdot(x-3)=12x^2-12x-72$

$\left(4x^3+16x^2+16x-12x^2-48x-48\right)-12x^2+12x+72=4x^3-8x^2-20x+24=0$

$4\cdot\left(x^3-2x^2-5x+6\right)=4\cdot(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x+2)=0\Rightarrow L=\{-2;1\}$

5) a) $|9-3x| > 2\cdot(x+2)$

$x \geq 3$	$x < 3$
$-9+3x > 2x+4 \Leftrightarrow x > 13$	$9-3x > 2x+4 \Leftrightarrow -5x > -5 \Leftrightarrow x < 1$
$x > 13$	$x < 1$
Probe: $x = 14 \Rightarrow |9-42| = 33 > 32$	Probe: $x = 0 \Rightarrow |9-0| = 9 > 4$

$$L = \{x \in R \mid x > 13 \vee x < 1\}$$

b) $4\cdot\dfrac{5-x^2}{6-2x} \geq 2x+5$

$x > 3$	$x < 3$
$20-4x^2 \geq (2x+5)\cdot(6-2x) = 12x-4x^2+30-10x$ $20 \geq 2x+30 \Leftrightarrow x \leq -5$	$20-4x^2 \leq (2x+5)\cdot(6-2x) = 12x-4x^2+30-10x$ $20 \leq 2x+30 \Leftrightarrow x \geq -5$
$x > 3 \vee x \leq -5$	$x < 3 \wedge x \geq -5$
Probe: $x = 4 \Rightarrow 4\cdot\dfrac{5-16}{6-8} = 22 \geq 8+5 = 13$	Probe: $x = 1 \Rightarrow 4\cdot\dfrac{5-1}{6-2} = 4 \geq 2+5 = 7$

$$L = \{x \in R \mid x > 3 \wedge x \leq -5\}$$

6) a) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{3x-15}{(2x-6)-\sqrt{4\cdot(x-1)}}\right) = \lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{3x-15}{(2x-6)-\sqrt{4x-4}}\cdot\dfrac{((2x-6)+\sqrt{4x-4})}{((2x-6)+\sqrt{4x-4})}\right)$

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{3\cdot(x-5)\cdot((2x-6)+\sqrt{4x-4})}{(2x-6)^2-(4x-4)}\right) = \lim_{x\to 5}\left(\frac{3\cdot(x-5)\cdot((2x-6)+\sqrt{4x-4})}{4x^2-24x+36-4x+4}\right) = \lim_{x\to 5}\left(\frac{3\cdot(x-5)\cdot((2x-6)+\sqrt{4x-4})}{4x^2-28x+40}\right)$$

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{3\cdot(x-5)\cdot((2x-6)+\sqrt{4x-4})}{(x-5)\cdot(4x-8)}\right) = \lim_{x\to 5}\left(\frac{3\cdot((2x-6)+\sqrt{4x-4})}{4\cdot(x-2)}\right) = \frac{3\cdot(4+4)}{12} = 2$$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{3x-15}{(2x-6)-\sqrt{4\cdot(x-1)}}\right) = \lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{3}{2-\dfrac{4}{2\cdot\sqrt{4x-4}}}\right) = \dfrac{3}{2-\dfrac{4}{2\cdot 4}} = \dfrac{3}{2-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{\dfrac{3}{2}} = 2$

7) $f(x)=2\cdot\left(4{,}5-1{,}5\cdot\cos^4\left(0{,}25x+7{,}5\pi\right)\right)-5=4-3\cdot\cos^4\left(0{,}25x+7{,}5\pi\right)$

$$\cos\left(0{,}25x+7{,}5\pi\right)=\cos\left(\frac{1}{4}x\right)\cdot\cos\left(\frac{15}{2}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{4}x\right)\cdot\sin\left(\frac{15}{2}\pi\right)=-\sin\left(\frac{1}{4}x\right)$$

$$f(x)=4-3\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right)^4=4-3\cdot\sin^4\left(\frac{1}{4}x\right)$$

Wertebereich: $4-3\cdot[0;1]=4-[0;3]=[1;4]\Rightarrow y\in[1;4]$

Periode: $P_{NEU}=\dfrac{P_{ALT}}{\frac{1}{4}}=4\pi\Rightarrow f(x)=f(x+4\pi)$

$$f(x+4\pi)=4-3\cdot\sin^4\left(\frac{1}{4}\cdot(x+4\pi)\right)=4-3\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{4}x+\pi\right)\right)^6$$

$$f(x+4\pi)=4-3\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{4}x\right)\cdot\cos(\pi)+\cos\left(\frac{1}{4}x\right)\cdot\sin(\pi)\right)^4=4-3\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right)^4=f(x)$$

Achsensymmetrie: $f(x)=f(-x)$

$$f(-x)=4-3\cdot\left(\sin\left(-\frac{1}{4}x\right)\right)^4=4-3\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right)^4=4-3\cdot\sin^4\left(\frac{1}{4}x\right)=f(x)$$

8) $f(x)=x^3+x^2+4\wedge g(x)=(x+2)^2=x^2+4x+4$

$d(x)=f(x)-g(x)=x^3-4x=x\cdot\left(x^2-4\right)=x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

$$\Rightarrow\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(x^3-4x\right)dx=\left|D(0)-D(-2)\right|+\left|D(2)-D(0)\right|$$

$D(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2$

$D(-2)=4-8=-4$

$D(0)=0-0=0$

$D(2)=4-8=-4$

$$\Rightarrow\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(x^3-4x\right)dx=\left|0-(-4)\right|+\left|-4-0\right|=8$$