Klausur zum Wintersemester 2012/13

Name: ______________________________ Matrikel-Nr: ____________________

EMail: ____ (optionale Schnell-Korrektur)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte	12	12	12	10	10	10	10	10	14

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen).
Die Verwendung von Büchern und elektronischen Hilfsmitteln ist nicht erlaubt.

1. Gegeben sind die Menge $A = \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 13; 16\}$ und die Menge B der natürlichen Zahlen (größer 1 und kleiner 18), die durch 2 oder durch 5 teilbar sind. Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

   a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$

2. Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Gleichungen und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form z=a+bi an.
   Bestimmen Sie für beide Aufgaben zusätzlich noch den Betrag und das Argument.

   a) $z^2 + (2i-3) \cdot z - 1 = 3i$ b) $8 \cdot z = (2+i)^4 - (3-4i) \cdot (3+4i)$

3. Vereinfachen Sie die folgenden Terme und fassen Sie das Ergebnis zusammen.

   a) $\dfrac{\sqrt[3k]{a^{5k-2}}}{\sqrt[k]{a^{k-4}}} \cdot \left(\sqrt[3k]{\sqrt{a^{2k-5}}}\right)^4$ b) $\dfrac{14 \cdot \left(3a^4 b^{-2} c^{-6}\right)^{-3}}{27 \cdot \left(9a^5 b^{-8} c^{-4}\right)^2} : \dfrac{3 \cdot \left(27a^{-3} b^2 c^{-3}\right)^{-4}}{81 \cdot \left(9a^4 b^{-6} c^7\right)^{-2}}$

   c) $2 \cdot e^{3 \cdot \ln 2} - 6 \cdot \log\sqrt[3]{100} + 0{,}5^{ld\,0{,}1} - ld\,32 - 0{,}001^{\log\frac{1}{3}} + 16 \cdot \ln\sqrt[4]{e^3}$

4. Berechnen Sie die zugehörigen Lösungsmengen und geben den Definitionsbereich an.

   a) $5x^2 \cdot \left(x^4 - 6x\right) + 20 = \left(x^3 - 2\right) \cdot \left(x^3 + 2\right) + x^3 \cdot \left(x^3 - 3\right)$ b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot (x-3) = \dfrac{19-6x}{x+6}$

5. Berechnen Sie den Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen.

   a) $2 \cdot (x+9) \le |3+x|$ b) $\dfrac{2x^2+17}{2-x} < 1 - 2x$

6. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

   a) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x \cdot \dfrac{2x^2 - 3x^4 + 1}{\left(2-x^2\right) \cdot \left(2+x^2\right)}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to 5}\left(\dfrac{3x-15}{4-\sqrt{6+2x}}\right)$

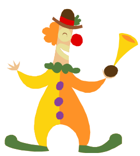
7. Bestimmen Sie von der folgenden Funktion den Wertebereich und beweisen Sie zusätzlich die Periode und die Symmetrie.

$$f(x) = 3 - \frac{1}{8} \cdot (2 \cdot \cos(0{,}75x + 4{,}5\pi))^6$$

8. Bestimmen Sie die Wendetangente der folgenden Funktion und berechnen anschließend die Achsenschnittpunkte dieser Tangenten?

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 7$$

9. Bestimmen Sie die Stammfunktion zu $f(x) = e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi \cdot x)$:



Manche schmeißen viele Kamelle,
ich werfe mit Punkten um mich, gelle!!

Torsten Schreiber 11.02.2013

Lückentext (Mathematik) zum Wintersemester 2012/13

Name: ____________________ Matrikel-Nr.: ____________________

Mit diesem Lückentext können Sie bis zu maximal 10 mögliche Zusatzpunkte erlangen.
Für jedes richtig eingetragene Wort ergibt sich somit ein Bonuspunkt.

Für eine Klasseneinteilung untersucht man mittels der **UND**-Verknüpfung, ob die Mengen untereinander **disjunkt** sind.

Wenn es sich um eine Antisymmetrie handelt, dann haben wir generell eine **Asymmetrie** mit mindestens einem Pasch.

Eine **konjugiert** komplexe Zahl benötigen wir, um durch die Erweiterung mittels 3. Binom den Ausdruck auf eine **reelle** Zahl zu reduzieren.

Strebt eine Funktion in der Unendlichkeit gegen **unendlich**, dann können wir eine diagonale Asymptote mittels Polynomdivision bestimmen.

Wird eine **trigonometrische** Funktion in Richtung der **x-Achse** verschoben, dann handelt es sich um eine Phasenverschiebung.

Eine **alternierende** Funktion haben wir, wenn die zugehörigen Ableitungen immer wieder in der gleichen Klasse landen.
Die Stammfunktion kann dann durch **zweimalige** partielle Integration gebildet werden.

konjugiert **y-Achse** **Oder** **trigonometrische** **disjunkt**

reelle **Und** **reduzierend** **Symmetrie** **transferiert** **unendlich**

bijunktiv **einmalige** **exponentielle** **zweimalige** **ganze**

x-Achse **Asymmetrie** **konstant** **alternierend**

Musterlösung Klausur Mathematik 1 2012/ 13 (Fulda)

1) Menge A: $A = \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 13; 16\}$
   Menge B: $B = \{2; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 14; 15; 16\}$

   a) $A \cap B$: $\{4; 6; 10; 12; 16\}$
   b) $A \cup B$: $\{x \in \mathbb{N} | x \geq 1 \wedge x \leq 16\}$
   c) $A \backslash B$: $\{x \in \mathbb{N} \backslash \{5\} | x mod 2 <> 0 \wedge x \leq 13\} = \{1; 3; 7; 9; 11; 13\}$
   d) $B \backslash A$: $\{2; 5; 8; 14; 15\}$

2) a) $z^2 + (2i-3) \cdot z - 1 = 1{,}5i \Leftrightarrow z^2 + (2i-3) \cdot z - 1 - 1{,}5i = z^2 + (2i-3) \cdot z - \left(1 + \frac{3}{2} i\right) = 0$

$$z_{1,2} = -\frac{2i-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(2i-3)^2}{4} + 1 + 3i} = -i + \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{(4i^2 - 12i + 9)}{4} + 1 + 3i} = -i + \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{(5-12i) + 4 + 12i}{4}} = -i + \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -i + \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$z_1 = -i$
$z_2 = -i + 3$

<u>Betrag</u>: $\Rightarrow z_1 : r = \sqrt{(-1)^2} = 1$
$\Rightarrow z_2 : r = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

<u>Argument</u>: $\Rightarrow z_1 : \alpha = 270° = \frac{3}{2}\pi$
$\Rightarrow z_2 : \alpha = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi$

b) $8 \cdot z = (2+i)^4 - (3-4i) \cdot (3+4i)$
$8 \cdot z = \left(1 \cdot 2^4 \cdot i^0 + 4 \cdot 2^3 \cdot i^1 + 6 \cdot 2^2 \cdot i^2 + 4 \cdot 2^1 \cdot i^3 + 1 \cdot 2^0 \cdot i^4\right) - \left(3^2 - (4i)^2\right)$
$8 \cdot z = (16 + 32i - 24 - 8i + 1) - (25) = -32 + 24i \Rightarrow z = -4 + 3i$

<u>Betrag</u>: $\Rightarrow z : r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

<u>Argument</u>: $\Rightarrow z : \alpha = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi$

3) a) $\frac{\sqrt[3k]{a^{5k-2}}}{\sqrt[k]{a^{k-4}}} \cdot \left(\sqrt[3k]{\sqrt{a^{2k-5}}}\right)^4 = a^{\frac{5k-2}{3k} - \frac{k-4}{k} + \frac{4 \cdot (2k-5)}{6k}} = a^{\frac{5k-2-3k+12+4k-10}{3k}} = a^{\frac{6k}{3k}} = a^2$

b) $\frac{14 \cdot \left(3a^4 b^{-2} c^{-6}\right)^{-3}}{27 \cdot \left(9a^5 b^{-8} c^{-4}\right)^2} : \frac{3 \cdot \left(27a^{-3} b^2 c^{-3}\right)^{-4}}{81 \cdot \left(9a^4 b^{-6} c^7\right)^{-2}} = \frac{14 \cdot 3^{-3} a^{-12} b^6 c^{18}}{3^3 \cdot 3^4 a^{10} b^{-16} c^{-8}} \cdot \frac{3^4 \cdot 3^{-4} a^{-8} b^{12} c^{-14}}{3 \cdot 3^{-12} a^{12} b^{-8} c^{12}} = 14 \cdot \frac{b^6 c^{18} b^{16} c^8 b^{12} 3^{12} b^8}{3^3 a^{12} 3^3 3^4 a^{10} a^8 c^{14} 3 a^{12} c^{12}} = 42 \cdot \frac{b^{42}}{a^{42}}$

c) $2 \cdot e^{3 \cdot \ln 2} - 6 \cdot \log \sqrt[3]{100} + 0{,}5^{ld\,0{,}1} - ld 32 - 0{,}001^{\log \frac{1}{3}} + 16 \cdot \ln \sqrt[4]{e^3}$
$2 \cdot e^{\ln 2^3} - 6 \cdot \log 10^{\frac{2}{3}} + 2^{-1 ld \frac{1}{10}} - ld 2^5 - 10^{-3 \log \frac{1}{3}} + 16 \cdot \ln e^{\frac{3}{4}}$

$2 \cdot 8 - 6 \cdot \frac{2}{3} + 10 - 5 - 27 + 16 \cdot \frac{3}{4} = 16 - 4 + 10 - 5 - 27 + 12 = 2$

4) a) $5x^2\cdot\left(x^4-6x\right)+20=\left(x^3-2\right)\cdot\left(x^3+2\right)+x^3\cdot\left(x^3-3\right);D=\Re$

$5x^6-30x^3+20=x^6-4+x^6-3x^3\Leftrightarrow 3x^6-27x^3+24=3\cdot\left(x^6-9x^3+8\right)=0$

$3\cdot\left(x^3-8\right)\cdot\left(x^3-1\right)=0\Rightarrow x_1=\sqrt[3]{8}=2\vee x_2=\sqrt[3]{1}=1\Rightarrow L=\{1;2\}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-3)=\frac{19-6x}{x+6};D=\Re\{-6\}$

$(x+6)\cdot(x-3)=(-2)\cdot(19-6x)\Leftrightarrow x^2+3x-18=-38+12x\Rightarrow x^2-9x+20=0$

$(x-4)\cdot(x-5)=0\Rightarrow L=\{4;5\}$

5) a) $2\cdot(x+9)\le|3+x|$

$x\ge-3$	$x<-3$
$2x+18\le x+3\Leftrightarrow x\le-15$	$2x+18\le-(3+x)\Leftrightarrow 3x\le-21\Leftrightarrow x\le-7$
$x\ge-3\vee x\le-15$	$x\le-7$
Probe: $x=0\Rightarrow 2\cdot9=18\le|3|$	Probe: $x=-8\Rightarrow 2\cdot1=2\le|3-8|=5$

$L=\{x\in R\mid x\le-7\}$

b) $\frac{2x^2+17}{2-x}<1-2x$

$x>2$	$x<2$
$2x^2+17<(1-2x)\cdot(2-x)=2-5x+2x^2\Leftrightarrow x<-3$	$2x^2+17>(1-2x)\cdot(2-x)=2-5x+2x^2\Leftrightarrow x>-3$
$x>2\vee x<-3$	$x<2\wedge x>-3$
Probe: $x=3\Rightarrow\frac{18+17}{2-1}=-35<1-6=-5$	Probe: $x=0\Rightarrow\frac{17}{2}<1$

$L=\{x\in R\mid x>2\vee x<-3\}$

6) a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\frac{2x^2-3x^4+1}{\left(2-x^2\right)\cdot\left(2+x^2\right)}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\frac{2x^2-3x^4+1}{4-x^4}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\frac{x^4\cdot\left(\frac{2}{x^2}-3+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\cdot\left(\frac{4}{x^4}-1\right)}\right)=3e^2$

b) $\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{3x-15}{4-\sqrt{6+2x}}\right)=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to5}\left(\frac{3}{-\frac{2}{2\cdot\sqrt{6+2x}}}\right)=\frac{3}{-\frac{1}{4}}=-12$$

$$\lim_{x\to5}\left(\frac{3x-15}{4-\sqrt{6+2x}}\cdot\frac{4+\sqrt{6+2x}}{4+\sqrt{6+2x}}\right)=\lim_{x\to5}\left(\frac{3\cdot(x-5)\cdot\left(4+\sqrt{6+2x}\right)}{16-(6+2x)}\right)=\lim_{x\to5}\left(\frac{3\cdot(x-5)\cdot\left(4+\sqrt{6+2x}\right)}{10-2x}\right)=\lim_{x\to5}\left(\frac{3\cdot(x-5)\cdot\left(4+\sqrt{6+2x}\right)}{-2\cdot(x-5)}\right)$$

$$\lim_{x\to5}\left(\frac{3\cdot\left(4+\sqrt{6+2x}\right)}{-2}\right)=\frac{3\cdot(4+4)}{-2}=-12$$

7) $f(x)=3-\frac{1}{8}\cdot\left(2\cdot\cos(0{,}75x+4{,}5\pi)\right)^6$

$$\cos(0{,}75x+4{,}5\pi)=\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\cdot\cos\left(\frac{9}{2}\pi\right)-\sin\left(\frac{3}{4}x\right)\cdot\sin\left(\frac{9}{2}\pi\right)=-\sin\left(\frac{3}{4}x\right)$$

$$f(x)=3-\frac{1}{8}\cdot 64\cdot\left(-\sin\left(\frac{3}{4}x\right)\right)^6=3-8\cdot\sin^6\left(\frac{3}{4}x\right)$$

Wertebereich: $3-8\cdot[0;1]=3-[0;8]=[3;-5]\Rightarrow y\in[3;-5]$

Periode: $P_{NEU}=\frac{P_{ALT}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\pi\Rightarrow f(x)=f\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)$

$$f\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)=3-8\cdot\sin^6\left(\frac{3}{4}\cdot\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)\right)=3-8\cdot\left(\sin\left(\frac{3}{4}x+\pi\right)\right)^6$$

$$f\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)=3-8\cdot\left(\sin\left(\frac{3}{4}x\right)\cdot\cos(\pi)+\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\cdot\sin(\pi)\right)^6=3-8\cdot\left(-\sin\left(\frac{3}{4}x\right)\right)^6=f(x)$$

Achsenymmetrie: $f(x)=f(-x)$

$$f(-x)=3-8\cdot\left(\sin\left(-\frac{3}{4}x\right)\right)^6=3-8\cdot-\left(\sin\left(\frac{3}{4}x\right)\right)^6 3-8\cdot\sin^6\left(\frac{3}{4}x\right)=f(x)$$

8) $f(x)=x^3+3x^2+5x+7$

$f'(x)=3x^2+6x+5$

$f''(x)=6x+6$

$f'''(x)=6$

Wendepunkt: $f''(x)=6x+6=0\Rightarrow x=-1;f(-1)=-1+3-5+7=4\Rightarrow WP(-1/4)$

Wendetangente: $y=m\cdot x+b\wedge m=f'(-1)=2$

$4=2\cdot(-1)+b\Rightarrow b=6$

$y=2\cdot x+6$

Schnittpunkte: $f(x)=0\Rightarrow S_x(-3/0)\wedge f(0)=6\Rightarrow S_y(0/6)$

9) $f(x) = e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi \cdot x) \Rightarrow \int \left(e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi \cdot x)\right) dx$

$f'(x) = e^{2-x}$ $\qquad f(x) = -e^{2-x}$
$g(x) = cos(3 - \pi x)$ $\qquad g'(x) = -sin(3 - \pi x) \cdot (-\pi)$

$$\int \left(e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi \cdot x)\right) dx = -e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi x) - \int \left(-e^{2-x} \cdot \pi \cdot sin(3 - \pi x)\right) dx$$

$$\int \left(e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi \cdot x)\right) dx = -e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi x) + \pi \cdot \int \left(e^{2-x} \cdot sin(3 - \pi x)\right) dx$$

$$\int \left(e^{2-x} \cdot sin(3 - \pi x)\right) dx$$

$f'(x) = e^{2-x}$ $\qquad f(x) = -e^{2-x}$
$g(x) = sin(3 - \pi x)$ $\qquad g'(x) = cos(3 - \pi x) \cdot (-\pi)$

$$\int \left(e^{2-x} \cdot sin(3 - \pi x)\right) dx = -e^{2-x} \cdot sin(3 - \pi x) - \int \left(-e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi x) \cdot (-\pi)\right) dx$$

$$\int \left(e^{2-x} \cdot sin(3 - \pi x)\right) dx = -e^{2-x} \cdot sin(3 - \pi x) - \pi \cdot \int \left(e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi x)\right) dx$$

$$\int \left(e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi \cdot x)\right) dx =$$
$$-e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi x) + \pi \cdot \left[-e^{2-x} \cdot sin(3 - \pi x) - \pi \cdot \int \left(e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi x)\right) dx\right] =$$
$$-e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi x) - \pi \cdot e^{2-x} \cdot sin(3 - \pi x) - \pi^2 \cdot \int \left(e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi x)\right) dx$$

$$(1 + \pi^2) \cdot \int \left(e^{2-x} \cdot cos(3 - \pi x)\right) dx = -e^{2-x} \cdot \left(cos(3 - \pi x) + \pi \cdot sin(3 - \pi x)\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-e^{2-x}}{1 + \pi^2} \cdot \left(cos(3 - \pi x) + \pi \cdot sin(3 - \pi x)\right) + C$$