Klausur zum Wintersemester 2011/12

Name: ______________________________ Matrikel-Nr: ______________________

EMail: ____ (optionale Schnell-Korrektur)

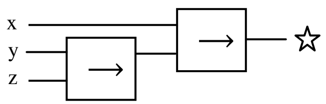
Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	12	15	18	20	15	20

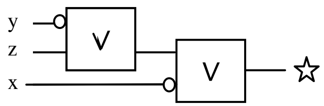
Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen).
Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht gestattet.

1. Gegeben sind die Menge A mit $A = \{-7; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 2; 3; 6; 7; 9; 10; 12\}$ und die Menge B der ganzen Zahlen (größer gleich -10 und kleiner gleich 10), die durch 3 oder durch 4 teilbar sind.
   Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

   a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \backslash B$ d) $B \backslash A$

2. Geben Sie für die folgenden beiden Schaltungen die zugehörigen Aussageformeln an und zeigen Sie, dass beide Ausdrücke äquivalent zueinander sind (Begründung).

   I. 

   II. 

3. Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Gleichungen und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form z=a+bi an.
   Bestimmen Sie bei Aufgabe b) zusätzlich noch den Betrag und das Argument.

   a) $z = \frac{5i \cdot (3+9i)}{(3i+1)^2} - \frac{(4i-3)^2}{(1-3i)}$ b) $z^2 - (6i-4) \cdot z = 12i + 9$

4. Gegeben seien die beiden Ebenen $e_1 : 4x + y - z = 13$ und $e_2 : 2x + 2y + z = 11$.

   a) Im Falle der Parallelität bestimmen Sie den Abstand der Ebenen, ansonsten eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden g.
   b) Liegt der Punkt $Q(1;1;1)$ in der Ebene e_1 und welchen Abstand hat er von der Ebene e_2?

5. Berechnen Sie mittels inverser Matrix die Lösung der folgenden Gleichung.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

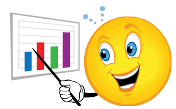
6. Das folgende, lineare Gleichungssystem ist auf seine Lösungsmannigfaltigkeit zu untersuchen. Entscheiden Sie mit Hilfe der Ranguntersuchungen nach Frobenius, für welche $\alpha, \beta \in Z$ das System

   a) i) genau eine Lösung
   ii) unendlich viele Lösungen
   iii) keine Lösung
   besitzt.

$$\left| \begin{array}{ccccccc} 4 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & - & \alpha \cdot x_3 & = & -6 \\ -x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & = & 7 \\ 2 \cdot x_1 & + & 7 \cdot x_2 & + & 5 \cdot x_3 & = & 2 \cdot \beta \end{array} \right|$$

   b) Für den Fall ii) geben Sie die Lösungsmenge in Parameterform an!

Geschenke gibt es nicht nur zu Weihnachten und Ostern!!!!!



Musterlösung Klausur Mathematik 1 2011/ 12 (Friedberg)

1) Menge A: $A = \{-7; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 2; 3; 6; 7; 9; 10; 12\}$
   Menge B: $B = \{-9; -8; -6; -4; -3; 0; 3; 4; 6; 8; 9\}$

   a) $A \cap B$: $\{-6; -4; 0; 3; 6; 9\}$
   b) $A \cup B$: $\{x \in Z \backslash \{1; 5; 11\} | x \geq -9 \wedge x \leq 12\}$
   c) $A \backslash B$: $\{-7; -5; -2; -1; 2; 7; 10; 12\}$
   d) $B \backslash A$: $\{x \in Z \backslash \{-6; -4; 0; 3; 6\} | (x \geq -9 \wedge x \leq 8) \wedge (x mod 3 = 0 \vee x mod 4 = 0)\}$

2) Formel für die Schaltung I. $A_1(x, y, z) := x \to (y \to z)$

   Formel für die Schaltung II. $A_2(x, y, z) := (\neg y \vee z) \vee \neg x$

   Es ist die Äquivalenz zu zeigen: $x \to (y \to z) \leftrightarrow (\neg y \vee z) \vee \neg x$

   <u>Wahrheitstabelle</u>:

X	W	W	W	W	F	F	F	F
Y	W	W	F	F	W	W	F	F
Z	W	F	W	F	W	F	W	F
$(y \to z)$	W	F	W	W	W	F	W	W
$x \to (y \to z)$	**W**	**F**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**
$(\neg y \vee z)$	W	F	W	W	W	F	W	W
$(\neg y \vee z) \vee \neg x$	**W**	**F**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**
$A_1(x, y, z) \leftrightarrow A_2(x, y, z)$	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**

   Es gilt $E[A] = Bool^3$ und somit handelt es sich um eine Tautologie, wodurch die Äquivalenz der beiden Aussagen gilt: $A_1(x, y, z) \Leftrightarrow A_2(x, y, z)$

3) a) $$z = \frac{5i \cdot (3+9i)}{(3i+1)^2} - \frac{(4i-3)^2}{(1-3i)} = \frac{5i \cdot 3 \cdot (1+3i)}{(1+3i)^2} - \frac{16i^2 - 24i + 9}{(1-3i)} = \frac{15i}{(1+3i)} - \frac{-24i-7}{(1-3i)}$$

   $$z = \frac{15i \cdot (1-3i)}{(1+3i) \cdot (1-3i)} - \frac{(-24i-7) \cdot (1+3i)}{(1-3i) \cdot (1+3i)} = \frac{15i - 45i^2}{1-9i^2} - \frac{-24i - 7 - 72i^2 - 21i}{1-9i^2} = \frac{15i + 45 + 45i - 65}{10}$$

   $$z = \frac{60}{10} i - \frac{20}{10} = 6i - 2$$

   b) $$z^2 - (6i-4) \cdot z = 12i + 9 \Leftrightarrow z^2 - (6i-4) \cdot z - (12i+9) = 0$$

   $$z_{1,2} = \frac{6i-4}{2} \pm \sqrt{(3i-2)^2 + 12i + 9} = (3i-2) \pm \sqrt{(9i^2 - 12i + 4) + 12i + 9} = (3i-2) \pm \sqrt{4}$$

   $z_1 = 3i - 4$
   $z_2 = 3i$

   <u>Betrag</u>: $\Rightarrow z_1 : r = \sqrt{9+16} = 5$; $\Rightarrow z_2 : r = \sqrt{9} = 3$

   <u>Argument</u>: $\Rightarrow z_1 : \alpha = \arctan(-0{,}75) + \pi$; $\Rightarrow z_2 : \alpha = 0{,}5 \cdot \pi = 90°$

4) a) $e_1: 4x+y-z=13$ und $e_2: 2x+2y+z=11$ mit $Q(1;1;1)$

Parallelität: $\vec{n}_1=\alpha\cdot\vec{n}_1 \rightarrow \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha=2\\ \alpha=0{,}5\\ \alpha=-1\end{matrix}\right\}$ *Da die Stellungsvektoren linear unabhängig sind, können die beiden Ebenen nicht parallel sein.*

Schnittgerade: $g: \vec{x}=P_0+\gamma\cdot\vec{a} \wedge \vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-2-4\\8-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}$$ *Richtungsvektor*

$$P_0: \left|\begin{matrix}4x & + & y & - & z & = & 13\\ 2x & + & 2y & + & z & = & 11\end{matrix}\right| \rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow \left|\begin{matrix}y & - & z & = & 5\\ 2y & + & z & = & 7\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}y & - & z & = & 5\\ 3y & & & = & 12\end{matrix}\right| \Rightarrow P_0=(2;4;-1)^T$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}$$

a) Punkt $Q(1;1;1)$: $e_1: 4x+y-z=4\cdot1+1\cdot1-1\cdot1=4\neq13$ *Der Punkt Q liegt nicht in der Ebene*

Abstand: $$d=\frac{ax+by+cz-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d=\frac{2x+2y+1z-11}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{2\cdot1+2\cdot1+1\cdot1-11}{\sqrt{9}}=\frac{-6}{3}=-2$$ *Der Abstand beträgt 2 Einheiten*

5) $$A\cdot\vec{x}=\vec{b}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-3\\-3&4&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-10\\10\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&-3&-3\\-3&4&-1\\3&-1&2\end{vmatrix}=\begin{matrix}8+9-9\\-\\-36+18+1\end{matrix}=8+17=25\neq0\Rightarrow$$ regulär, so dass die Inverse existiert

$$A^{-1}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}8-1&-(-6+3)&3-12\\-(-6-3)&2+9&-(-1+9)\\3+12&-(-1-9)&4-9\end{pmatrix}^T=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}7&3&-9\\9&11&-8\\15&10&-5\end{pmatrix}^T=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}7&9&15\\3&11&10\\-9&-8&-5\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\vec{b}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}7&9&15\\3&11&10\\-9&-8&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-10\\10\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}-35-90+150\\-15-110+100\\45+80-50\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}25\\-25\\75\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Der Lösungsvektor lautet $\vec{x}=(1;-1;3)^T$

6) $$\left|\begin{array}{rcrcrcr} 4\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & - & \alpha\cdot x_3 & = & -6 \\ -x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 7 \\ 2\cdot x_1 & + & 7\cdot x_2 & + & 5\cdot x_3 & = & 2\cdot\beta \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 7 \\ 4\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & - & \alpha\cdot x_3 & = & -6 \\ 2\cdot x_1 & + & 7\cdot x_2 & + & 5\cdot x_3 & = & 2\cdot\beta \end{array}\right| \begin{array}{l} \} \mid\cdot 4 \\ \\ \} \mid\cdot 2 \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 7 \\ & & 11\cdot x_2 & + & (12-\alpha)\cdot x_3 & = & 22 \\ & & 11\cdot x_2 & + & 11\cdot x_3 & = & 14+2\cdot\beta \end{array}\right| \} \mid\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 7 \\ & & 11\cdot x_2 & + & (12-\alpha)\cdot x_3 & = & 22 \\ & & & & (\alpha-1)\cdot x_3 & = & 2\cdot\beta-8 \end{array}\right|$$

a) (i) $\alpha \neq 1 : \det(A) = -11\cdot(\alpha-1) \neq 0 \Rightarrow Rg(A) = 3 = Rg(A|b)$

(ii) $\alpha = 1 \wedge \beta = 4 : \det(A) = -11 \neq 0 \Rightarrow Rg(A) = 2 = Rg(A|b)$

(iii) $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 4 : \det(A) = -11 \neq 0 \wedge \det(A|b) = -11\cdot(2\beta-8) \neq 0$
$\Rightarrow Rg(A) = 2 \neq 3 = Rg(A|b)$

b) (ii) $\alpha = 1 \wedge \beta = 4 : \det(\mathrm{A}) = -11 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Rg}(\mathrm{A}) = 2 = \mathrm{Rg}(\mathrm{A}|\mathrm{b})$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 7 \\ 0 & & 11\cdot x_2 & + & 11\cdot x_3 & = & 22 \\ 0 & & 0 & & 0 & = & 0 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{c} -x_1 + 2\cdot(2-\gamma) + 3\cdot\gamma = 7 \Rightarrow x_1 = \gamma - 3 \\ 11\cdot x_2 + 11\cdot\gamma = 22 \Rightarrow x_2 = 2-\gamma \\ x_3 = \gamma \end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \gamma-3 \\ 2-\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \gamma \\ 2 & -\gamma \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$