Klausur (Mathematik II) - Sommersemester 2012

Name: ______________________________ Matrikel-Nr: ________________

EMail: ______________________________ (optionale Schnell-Korrektur)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte	10	10	12	10	10	16	12	20

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen).
Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht gestattet.

1. Begründen Sie, ob es sich bei ψ um eine totale bzw. partielle Ordnungsrelation oder um eine Äquivalenzrelation (inkl. der Äquivalenzklassen) handelt.

$$\psi = \left\{ x \times y \in \Re^2 x \Re^2 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = (y_1)^2 + (y_2)^2 \right\}; x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

2. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion den folgenden Zusammenhang.

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n-1); n \geq 1$$

3. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 4} \left(\frac{10x - 40}{(x-1) - \sqrt{x+5}} \right)$ auf zwei Arten, mittels

   a) Erweiterung durch das 3. Binom.
   b) Regel von L'Hospital.

4. Geben Sie zu der Funktion $f(x) = 3 - 4 \cdot \cos^4(0{,}2 \cdot x + 5{,}5 \cdot \pi)$ das Symmetrieverhalten, die Periode und die Amplituden (Wertebereich) an und beweisen Ihre Ergebnisse.

5. Bestimmen Sie die Fläche, die von den beiden Funktionen $f(x) = 12x \cdot (x+2)^2$ und $g(x) = x \cdot (60x + 72)$ eingeschlossen wird.

6. Die Folge a_n sei rekursiv gegeben mit $a_{n+1} = \sqrt{6 + 5 \cdot a_n}; a_1 = 2$ für $n \geq 1$.
   Zeigen Sie:

   a) Die Folge ist streng monoton wachsend oder fallend.
   b) Die Folge besitzt eine obere und untere Schranke.
   c) Die Folge ist konvergent.
   d) Berechnen Sie den Grenzwert.

7. Berechnen Sie die Werte (Grenzwert bzw. Partialsumme) der folgenden Reihen:

   a) $0{,}5 \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{k!}$ b) $81 \cdot \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{2}{3} \right)^{3+k}$

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4 \cdot \left(3x - 8 \cdot \sqrt[4]{2x+6}\right)$.

   a) Geben Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich an.
   b) Berechnen Sie das 3. Taylorpolynom $P_3(x, 5)$ (ohne Fehlerabschätzung)
   c) Bestimmen Sie zu der 1. Ableitung die Umkehrfunktion.

Sie müssen nur Mathe können
-kein spanisch-
um die Meisterschaft zu gewinnen!!

Torsten Schreiber 05.07.2012

Lückentext (Mathematik II) zum Sommersemester 2012

Name:____________________ Matrikel-Nr.:____________________

Mit diesem Lückentext können Sie bis zu maximal 10 mögliche Zusatzpunkte erlangen.
Für jedes richtig eingetragene Wort ergibt sich somit ein Bonuspunkt.

Eine Funktion liegt dann vor, wenn es sich um eine ________________ Relation handelt.
Man kann die Umkehrfunktion nur dann bilden, wenn die Ausgangsfunktion __________ist.

Man spricht von einer Antisymmetrie, wenn eine generelle Asymmetrie vorliegt, wobei _____________ein Tupel auf der „Spiegelachse“ liegen muss.

Die Konvergenz einer Reihe, in der Fakultäten vorkommen, beweist man, indem man das ________________nutzt.

Wird der Grenzwert einer Funktion gegen unendlich gebildet und ist das Ergebnis ebenfalls unendlich, so kann als Annäherung eine ___________Asymptote gebildet werden.

Innerhalb einer Kurvendiskussion werden die __________________mittels der 2. Ableitung gebildet, wobei eine Stelle nur aus der ______-Koordinate besteht und der Punkt noch durch Einsetzen in die ________________bestimmt werden kann.

Eine Funktion ist nur dann ______________, wenn sie keine Sprungstellen besitzt, d.h. ohne absetzen mit einem Stift gezeichnet werden kann.

Für die Integralrechnung ist es wichtig, dass Flächen stets positive Werte annehmen müssen und niemals über eine __________hinweg integriert werden darf.

linkseindeutig Umkehrfunktion höchstens Y bijektiv

Nullstelle diagonale mindestens differenzierbar Wurzelsatz

Wendepunkte rechtseindeutig X waagerechte Extrempunkte

Ausgangsfunktion Quotientenkriterium Extremstelle surjektiv

stetig

Musterlösung Klausur Mathematik II Sommersemester 2012

1) $\psi = \{(x,y) \in \Re^2 x \Re^2 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = (y_1)^2 + (y_2)^2\}; x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$

reflexiv: $(x,x) \in \psi; x \in R^2$

$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2$

transitiv: $(x,y) \in \psi \wedge (y,z) \in \psi \Rightarrow (x,z) \in \psi; x,y,z \in R^2$

$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (y_1)^2 + (y_2)^2 \wedge (y_1)^2 + (y_2)^2 = (z_1)^2 + (z_2)^2$

$\Rightarrow (x_1)^2 + (x_2)^2 = (z_1)^2 + (z_2)^2$

symmetrisch: $(x,y) \in \psi \Leftrightarrow (y,x) \in \psi; x,y \in R^2$

$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (y_1)^2 + (y_2)^2 \Leftrightarrow (y_1)^2 + (y_2)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2$

Als Äquivalenzklassen kommen die jeweiligen Summen der Quadrate in Frage, d.h. es werden die Tupel zusammengefasst, wo die zugehörige Hypothenuse gleich groß ist (siehe Pythagorassatz: $a^2 + b^2 = c^2$)

2) $1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \sum_{k=1}^{n} (3n-2) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n-1); n \geq 1$

Induktionsanfang:

$n = 1$: $a_1 = S_1$

$(3 \cdot 1 - 2) = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)$

Induktionsschluss:

$n = n + 1$: $S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$

$\frac{1}{2} n \cdot (3n-1) + (3 \cdot (n+1) - 2) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (3 \cdot (n+1) - 1)$

$\frac{3}{2} n^2 - \frac{1}{2} n + 3n + 1 = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (3n+2)$

$\frac{3}{2} n^2 + \frac{5}{2} n + 1 = \frac{1}{2} \cdot (3n^2 + 5n + 2) = \frac{3}{2} n^2 + \frac{5}{2} n + 1$

3) $\lim_{x \to 4} \left(\frac{10x - 40}{(x-1) - \sqrt{x+5}} \right) = \frac{0}{0}$

a) 3. Binom:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{10x - 40}{(x-1) - \sqrt{x+5}} \cdot \frac{(x-1) + \sqrt{x+5}}{(x-1) + \sqrt{x+5}} \right) = \lim_{x \to 4} \left(\frac{10 \cdot (x-4) \cdot \left((x-1) + \sqrt{x+5}\right)}{(x-1)^2 - (x+5)} \right)$$

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{10 \cdot (x-4) \cdot \left((x-1) + \sqrt{x+5}\right)}{x^2 - 2x + 1 - x - 5} \right) = \lim_{x \to 4} \left(\frac{10 \cdot (x-4) \cdot \left((x-1) + \sqrt{x+5}\right)}{x^2 - 3x - 4} \right)$$

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{10 \cdot (x-4) \cdot \left((x-1) + \sqrt{x+5}\right)}{(x-4) \cdot (x+1)} \right) = \lim_{x \to 4} \left(\frac{10 \cdot \left((x-1) + \sqrt{x+5}\right)}{(x+1)} \right) = \frac{10 \cdot (3+3)}{5} = 12$$

b) L'Hospital:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{10}{1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+5}}} \right) = \frac{10}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{10}{\frac{5}{6}} = 10 \cdot \frac{6}{5} = 12$$

4) $f(x) = 3 - 4 \cdot \cos^4(0{,}2 \cdot x + 5{,}5 \cdot \pi)$

$$f(x) = 3 - 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{5}x - 5{,}5 \cdot \pi\right)\right]^4 = 3 - 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{5}x\right) \cdot cos(5{,}5\pi) + \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \cdot sin(5{,}5\pi)\right]^4$$

$$f(x) = 3 - 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{5}x\right) \cdot 0 + \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \cdot (-1)\right]^4 = 3 - 4 \cdot sin^4\left(\frac{1}{5}x\right)$$

Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = 3 - 4 \cdot \left[sin\left(\tfrac{1}{5} \cdot (-x)\right)\right]^4 = 3 - 4 \cdot \left[(-1) \cdot sin\left(\tfrac{1}{5}x\right)\right]^4$$

$$f(-x) = 3 - 4 \cdot sin^4\left(\tfrac{1}{5}x\right) = f(x)$$

Periode: $P_{NEU} = \frac{\pi}{\frac{1}{5}} = 5\pi \Rightarrow f(x) = f(x + 5\pi)$

$$f(x + 5\pi) = 3 - 4 \cdot \left[sin\left(\tfrac{1}{5} \cdot (x + 5\pi)\right)\right]^4 = 3 - 4 \cdot \left[sin\left(\tfrac{1}{5}x + \pi\right)\right]^4$$

$$f(x + 5\pi) = 3 - 4 \cdot \left[sin\left(\tfrac{1}{5}x\right) \cdot cos(\pi) + cos\left(\tfrac{1}{5}x\right) \cdot sin(\pi)\right]^4$$

$$f(x + 5\pi) = 3 - 4 \cdot \left[sin\left(\tfrac{1}{5}x\right) \cdot (-1) + cos\left(\tfrac{1}{5}x\right) \cdot 0\right]^4 = 3 - 4 \cdot sin^4\left(\tfrac{1}{5}x\right)$$

$$f(x + 5\pi) = f(x)$$

Amplituden: $W = 3 - 4 \cdot [0; 1] = 3 - [0; 4] \Rightarrow y \in [-1; 3]$

5) $f(x) = 12x \cdot (x + 2)^2 = 12x \cdot (x^2 + 4x + 4) = 12x^3 + 48x^2 + 48x$
$g(x) = x \cdot (60x + 72) = 60x^2 + 72x$

$f(x) = g(x) \Rightarrow 12x^3 + 48x^2 + 48x = 60x^2 + 72x$

$\Rightarrow d(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} d(x)dx + \int_{0}^{2} d(x)dx = \int_{-1}^{0} (12x^3 - 12x^2 - 24x)dx + \int_{0}^{2} (12x^3 - 12x^2 - 24x)dx$$

$D(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

$D(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 = 3 + 4 - 12 = -5$
$D(0) = 3 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 - 12 \cdot 0^2 = 0$
$D(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 = 48 - 32 - 48 = -32$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \int_{-1}^{0} (12x^3 - 12x^2 - 24x)dx = |D(0) - D(-1)| = |0 - (-5)| = 5\\&\Rightarrow \int_0^2 (12x^3 - 12x^2 - 24x)dx = |D(2) - D(0)| = |(-32) - 0| = 32\end{aligned}\right\rbrace \text{Die Fläche beträgt 37 FE}$$

6) $a_{n+1} = \sqrt{6 + 5a_n}; a_1 = 2$ $\qquad a_2 = \sqrt{6 + 5 \cdot 2} = 4$

a) Monotonie: Behauptung: $a_{n+1} > a_n$ (streng monoton steigend)

Induktionsanfang:
$n = 1$: $a_2 = 4 > 2 = a_1$

Induktionsschluss:
$n = n + 1$: $a_{n+2} > a_{n+1}$

$$\sqrt{6 + 5a_{n+1}} > \sqrt{6 + 5a_n}$$
$$6 + 5a_{n+1} > 6 + 5a_n$$
$$5a_{n+1} > 5a_n$$
$$a_{n+1} > a_n$$

b) Schranken: Da die Folge streng monoton steigend ist muss $a_1 = 2$ eine untere Schranke sein.

Behauptung: $a_n < 10$ (obere Schranke)

Induktionsanfang:
$n = 1$: $a_1 = 2 < 10$

Induktionsschluss:
$n = n + 1$: $a_{n+1} < 10$

$$a_n < 10$$
$$5a_n < 50$$
$$6 + 5a_n < 56$$
$$\sqrt{6 + 5a_n} < \sqrt{56}$$
$$a_{n+1} < \sqrt{56} < 10$$

c) Konvergenz: Da die Folge streng monoton fallen ist und durch das Intervall $[2; 10[$ beschränkt ist, muss sie konvergent sein und der Grenzwert existieren.

d) Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

$$\alpha = \sqrt{6 + 5\alpha}$$
$$\alpha^2 = 6 + 5\alpha$$
$$\alpha^2 - 5\alpha - 6 = 0$$
$$(\alpha - 6) \cdot (\alpha + 1) = 0$$
$$\alpha_1 = 6 \vee \alpha_2 = -1$$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 6, da\ 6 \in [2; 10[$

7)

a) $0{,}5 \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{k!} = 0{,}5 \cdot 2^2 \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = 2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} - \left(\frac{2^0}{o!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) \right) = 2 \cdot \left(e^2 - 5 \right) = 2e^2 - 10$

b) $81 \cdot \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{2}{3} \right)^{3+k} = 81 \cdot \frac{8}{27} \cdot \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{2}{3} \right)^{k} = 24 \cdot \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{k+1} = 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\frac{2}{3}} = 48 \cdot \left(1 - \frac{16}{81} \right) = 48 \cdot \frac{65}{81} = \frac{1040}{27} = 38\frac{14}{27}$

8) $f(x) = 4 \cdot \left(3x - 8 \cdot \sqrt[4]{2x+6} \right)$

a) Definitionsbereich: $2x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -3\}$

Wertebereich: $f(-3) = 12 \cdot (-3) - 32 \cdot \sqrt{-6+6} = -36 \Rightarrow W = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -36\}$

b) Taylorpolynom: $f(x) = 12x - 32 \cdot \sqrt[4]{2x+6} = 12x - 32 \cdot (2x+6)^{\frac{1}{4}}$

$$f'(x) = 12 - 32 \cdot (2x+6)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 12 - 16 \cdot (2x+6)^{-\frac{3}{4}}$$
$$f''(x) = -16 \cdot (2x+6)^{-\frac{7}{4}} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 2 = 24 \cdot (2x+6)^{-\frac{7}{4}}$$
$$f'''^{(x)} = 24 \cdot (2x+6)^{-\frac{11}{4}} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot 2 = -84 \cdot (2x+6)^{-\frac{11}{4}}$$

n	$f^n(5)$	$(x-5)^n$	$n!$
0	-4	1	1
1	10	$x-5$	1
2	$\frac{24}{128} = \frac{3}{16}$	$(x-5)^2$	2
3	$-\frac{84}{2048} = -\frac{21}{512}$	$(x-5)^3$	6

$$P_3(x,5) = -4 + 10 \cdot (x-5) + \frac{3}{32} \cdot (x-5)^2 - \frac{7}{1024} \cdot (x-5)^3 + R_3(x,5)$$

c) Umkehrfunktion: $f'(x) = 12 - 16 \cdot (2x+6)^{-\frac{3}{4}}$

$$y = 12 - \frac{16}{\sqrt[4]{(2x+6)^3}}$$
$$y - 12 = -\frac{16}{\sqrt[4]{(2x+6)^3}}$$
$$\sqrt[4]{(2x+6)^3} = -\frac{16}{y-12}$$
$$2x + 6 = \sqrt[3]{\left(-\frac{16}{y-12}\right)^4}$$
$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{16}{y-12}\right)^4} - 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{16}{x-12}\right)^4} - 3$$

Torsten Schreiber 05.07.2012

Lückentext (Mathematik II) zum Sommersemester 2012

Name: ____________________ Matrikel-Nr.: ____________________

Mit diesem Lückentext können Sie bis zu maximal 10 mögliche Zusatzpunkte erlangen. Für jedes richtig eingetragene Wort ergibt sich somit ein Bonuspunkt.

Eine Funktion liegt dann vor, wenn es sich um eine **rechtseindeutige** Relation handelt. Man kann die Umkehrfunktion nur dann bilden, wenn die Ausgangsfunktion **bijektiv** ist.

Man spricht von einer Antisymmetrie, wenn eine generelle Asymmetrie vorliegt, wobei **mindestens** ein Tupel auf der „Spiegelachse“ liegen muss.

Die Konvergenz einer Reihe, in der Fakultäten vorkommen, beweist man, indem man das **Quotientenkriterium** nutzt.

Wird der Grenzwert einer Funktion gegen unendlich gebildet und ist das Ergebnis ebenfalls unendlich, so kann als Annäherung eine **diagonale** Asymptote gebildet werden.

Innerhalb einer Kurvendiskussion werden die **Wendepunkte** mittels der 2. Ableitung gebildet, wobei eine Stelle nur aus der **X-**Koordinate besteht und der Punkt noch durch Einsetzen in die **Ausgangsfunktion** bestimmt werden kann.

Eine Funktion ist nur dann **stetig**, wenn sie keine Sprungstellen besitzt, d.h. ohne absetzen mit einem Stift gezeichnet werden kann.

Für die Integralrechnung ist es wichtig, dass Flächen stets positive Werte annehmen müssen und niemals über eine **Nullstelle** hinweg integriert werden darf.

linkseindeutig Umkehrfunktion höchstens Y bijektiv

Nullstelle diagonale mindestens differenzierbar Wurzelsatz

Wendepunkte rechtseindeutig X waagerechte Extrempunkte

Ausgangsfunktion Quotientenkriterium Extremstelle surjektiv

stetig