Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was bedeutet ein negativer Exponent?
- ✓ Wie kann man den Grad einer Wurzel noch darstellen?
- ✓ Wie werden Potenzen potenziert?
- ✓ Was bewirkt eine Null im Exponenten?
- ✓ Wann kann man Potenzen addieren / subtrahieren?
- ✓ Wie lösen Sie verschachtelte Wurzelausdrücke?
- ✓ Was verstehen Sie unter der Hierarchie der Mathematik?
- ✓ Was ist ein Polynom vom Grade n?
- ✓ Was bedeutet der Begriff Gegenoperation?
- ✓ Wie Lösen Sie eine Gleichung mit einem höheren Operator?
- ✓ Wann sprechen Sie von einer Funktion?
- ✓ Auf welcher Achse wird der Wertebereich abgetragen?
- ✓ Was darf hinter einem Logarithmus nie stehen?
- ✓ Welche Einschränkungen gibt es in der Mathematik noch?
- ✓ Welche Arten der Symmetrie können Funktionen besitzen?
- ✓ Was ist eine Hyperbel und welche Varianten gibt es?

DEFINITION EINES LOGARITHMUS

Der Logarithmus dient zur Berechnung eines variablen Ausdrucks im Exponenten.

Es gilt: $$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}}$$

<u>10er-Logarithmus:</u>
Ein Logarithmus ohne Angabe einer Basis ist immer zur Basis 10. $\log x = \log_{10} x$

Beispiel: $\log 10.000 = \log_{10} 10^4 = 4$

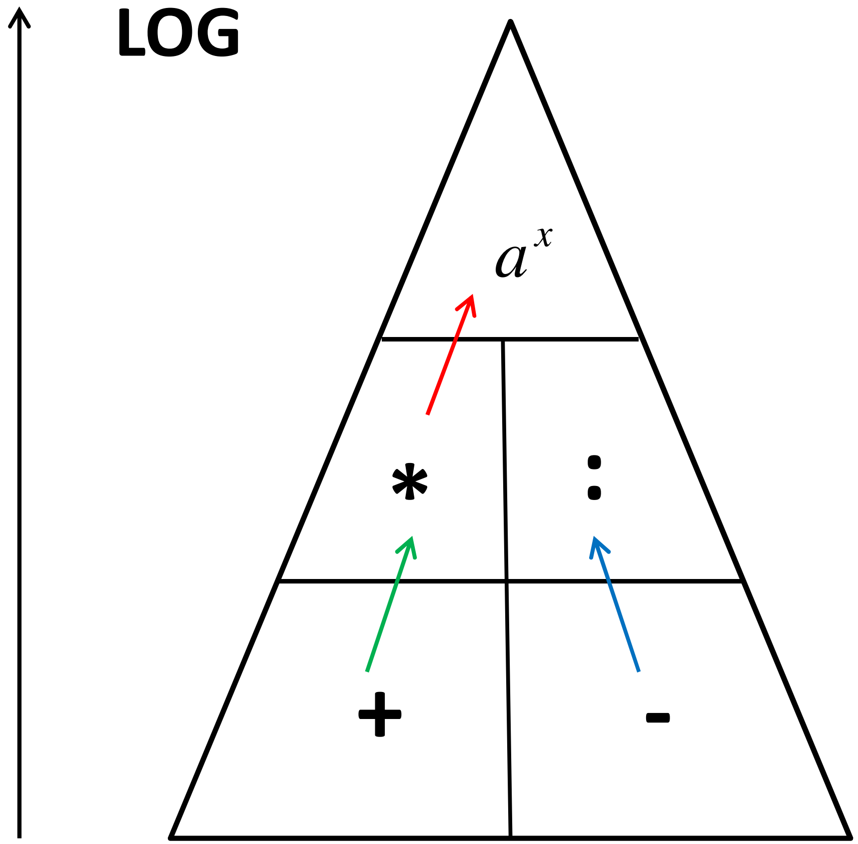
<u>Logarithmus naturalis:</u>
Der Logarithmus zur Basis *e* ist der natürliche Logarithmus. $\ln x = \log_e x$

Beispiel: $\ln 42 = \log_e 42 = 3{,}737$

<u>Logarithmus dualis:</u>
Ein Logarithmus zur Basis 2 nennt man dualis. $ld(x) = \log_2 x$

Beispiel: $ld(32) = \log_2 2^5 = 5$

LOGARITHMUS-GESETZE



$$\boxed{3 \cdot \log 4 = \log 4^3 = \log 64}$$

$$\boxed{\log 2 + \log 3 = \log 2 \cdot 3 = \log 6}$$

$$\boxed{\log 8 - \log 2 = \log \frac{8}{2} = \log 4}$$

OPERATION UND GEGENOPERATION

Die zu einem Logarithmusausdruck zugehörige Gegenoperation ist stets ein Exponentialoperator, wodurch sich beide neutralisieren.
Die Zusammenhänge ergeben sich wie folgt:

$$\boxed{\log 10^{\Psi} = 10^{\log \Psi} = \Psi} \quad \boxed{\ln e^{\Omega} = e^{\ln \Omega} = \Omega} \quad \boxed{ld\, 2^{\Theta} = 2^{ld\Theta} = \Theta}$$

Aufgrund dieser Vereinfachungen, muss die zugehörige Basis bzw. der Exponent im ersten Schritt mittels exponentieller/ logarithmischer Gesetze passend umgeformt werden.

Beispiel:

$$\log\frac{1}{1000} - 4\cdot\ln\sqrt{e} + \frac{1}{2}\cdot ld16 + 0{,}1^{\log 0,25} + \left(\frac{1}{e^2}\right)^{\ln\frac{1}{3}} - 8^{ld3}$$

$$\log 10^{-3} - 4\cdot\ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot ld2^4 + 10^{(-1)\cdot\log\frac{1}{4}} + e^{(-2)\cdot\ln\frac{1}{3}} - 2^{3\cdot ld3}$$

$$-3 - 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 3^3 = -3 - 2 + 2 + 4 + 9 - 27 = -17$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $3\cdot\log(x-y)+\log(x+y)-\frac{1}{2}\log(x-y)^4$

3) $\log\sqrt[5]{\frac{x^3\cdot y^2}{3\cdot(x+y^2)}}$

2) $2\ln 2x-3\ln 2+4\ln\sqrt{x}+2\ln\frac{4}{x^2}$

4) $\ln\left(\frac{2\cdot\sqrt{a-2b}}{c^2\cdot\sqrt[4]{d}}\right)^3$

5) $16^{ld\sqrt{3}}+1.000^{\log 3}-\sqrt[4]{e}^{2\ln 25}-2\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\log\frac{1}{100}+3ld\,\frac{1}{8}$

6) $\left(e^4\right)^{\ln 2}+0{,}1ld1024-\log\sqrt{10.000}+0{,}01^{\log\frac{1}{3}}-\left(\frac{2}{16}\right)^{-ld\,3}+6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $$\log\frac{1}{100}-\sqrt{e}^{\ln 4}+4^{ld\,3}-2ld\,0{,}25$$

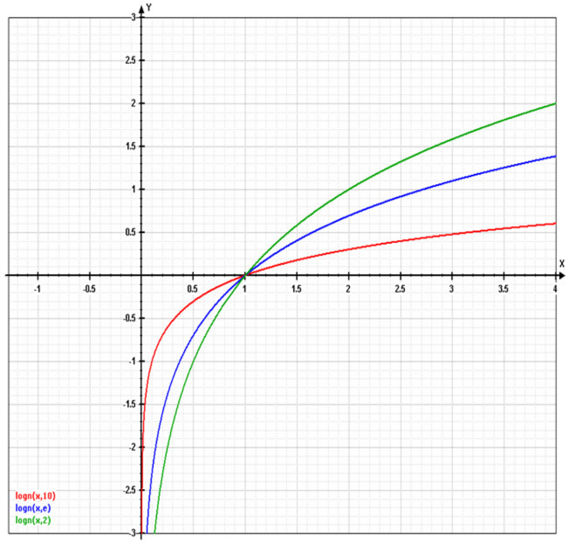
2) $$100^{\log 3}-\ln\frac{1}{e^2}+0{,}5ld\,16-e^{-3\ln\frac{1}{2}}$$

3) $$\left(\frac{1}{8}\right)^{ld\,2}-6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}+\frac{1}{4}ld\,64-\frac{1}{2}\log\frac{1}{1000}+\sqrt[3]{e}^{\ln 27}$$

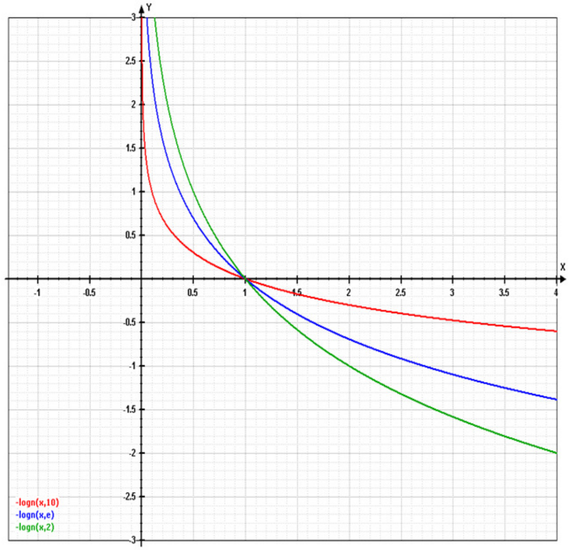
4) $$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\ln\frac{1}{9}}+100^{\log\frac{1}{2^{-2}}}-16^{\frac{1}{2}ld\,4}+2\log 0{,}001-3\ln\frac{1}{e^3}+\frac{1}{4}ld\,\frac{1}{256}$$

FUNKTIONSGRAPHEN

Positiver Logarithmus:



Negativer Logarithmus:



- Ausschließlich positive Steigung
- Ausschließlich negative Steigung

- Gemeinsamer Punkt: (1/0)
- Je größer die Basis, desto flacher ab x=1
- Je größer die Basis, desto steiler vor x=1

DEFINITIONS-/ WERTEBEREICH

Definitionsbereich:
Wie man schon durch die Funktionsgraphen erkennen kann, darf man einen Logarithmus nur von positiven Zahlen ziehen.

$D = \{x \in \Re \mid x > 0\} = \Re^{+}$, da $10^{x} > 0 \Leftrightarrow \log(>0) = x$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} &\ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = y \\ &\left(x^2 - 5x + 6\right) = (x-3)\cdot(x-2) > 0 \end{aligned}\right\} \quad D = \{x \in \Re \mid x > 3 \vee x < 2\}$$

Wertebereich:
Aufgrund der Funktionsgraphen ist ersichtlich, dass ein Logarithmus alle reellen Werte annehmen kann.

$W = y \in \Re$, da $10^{(>0)} > 1 \wedge 10^{(\leq 0)} \leq 1$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} &12 - 3\cdot\ln(5x-3) = y \\ &12 - 3\cdot\,]-\infty;\infty[\, \Rightarrow \Re \end{aligned}\right\} \quad W = y \in \Re$$

DIE LOGARITHMEN-GLEICHUNG

Sofern eine reine Logarithmengleichung existiert kann man diese mit der folgenden Methodik lösen, wobei primäres Ziel eine Isolierung des Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung ist:

<u>Methodik:</u>

1. Die Faktoren vor dem Logarithmus in den Exponenten verschieben.
2. Alle positiven Terme über den Bruchstrich, alle negativen darunter schreiben.
3. Streichen der Logarithmen auf beiden Seiten.
4. Lösen der Gleichung.

Beispiel: $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log 2 - \frac{1}{2} \cdot \log x^4 = 2 \cdot \log 4 - \log(x-2)$

$$\log x^2 - \log 2^3 - \log\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}} = \log 4^2 - \log(x-2)$$

$$\log \frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \log \frac{16}{x-2}$$

$$\frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \frac{16}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = 16 \cdot 8 = 128 \Leftrightarrow x = 130$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3 \cdot \log x - 4 \cdot \log \frac{2}{x} - \frac{1}{3} \cdot \log\left(x^2\right)^6 = \frac{2}{3} \cdot \log 27 + \frac{1}{2} \cdot \log x^4 - 2 \cdot \log 6$

2) $3 \cdot \ln 4 - 0{,}5 \cdot \ln \frac{16}{x^4} + 2 \cdot \ln 8 = 1{,}5 \cdot \ln x^4 - 8 \cdot \ln \sqrt[4]{\frac{1}{x}} - 2 \cdot \ln \frac{1}{4}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x) = \frac{2}{5} \cdot \ln\left(4x - 3 - x^2\right)$ 4) $g(x) = 42 + \log\left(2 - \sqrt{x-2}\right)$ 5) $h(x) = \frac{42}{ld(3 \cdot x + 6)}$

III. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $\log \frac{1}{1000} - 4 \ln \sqrt{e} + 16^{ld \sqrt{3}} + 2e^{2 \cdot \ln 3} - \left(10^{\log 12} + 2ld4\right)$

2) $6 \cdot \log \sqrt[3]{10} + 4^{ld3} - 2 \cdot \ln \frac{1}{e^2} - 0{,}2 \cdot ld\left(32^5\right) + \left(\frac{1}{100}\right)^{\log\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{e}\right)^{\ln\left(5^4\right)}$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $\frac{1}{4}\cdot\log(256x^8)-2\log\frac{\sqrt{9}}{x^2}-0{,}5\cdot\log\frac{x^4}{9}=1{,}5\cdot\log(9x^4)+3\cdot\log\frac{1}{2x^3}+4\cdot\log\sqrt{27\cdot x}$

2) $6\cdot\ln\sqrt[3]{3}-4\cdot\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{x}}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{9}{x}\right)=2\cdot\ln\frac{\sqrt{x^3}}{3}-0{,}25\cdot\ln(16x^8)+3\cdot\ln\frac{8}{x^2}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2-6\cdot x-40\right)$

4) $g(x)=\log\left(\sqrt{2x+4}-8\right)-12$

5) $h(x)=\frac{3\cdot x}{\ln\left(15-3\cdot x\right)}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was können Sie durch die Art des Logarithmus erkennen?
- ✓ Wie ziehen Sie einen Logarithmus max. auseinander?
- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen LOG und LN?
- ✓ Wie lautet der Definitionsbereich von Log(x-1)?
- ✓ Wie lautet die Umkehrfunktion von LD(x)?
- ✓ Wie können Sie einen LD eliminieren?
- ✓ Aus welchen 3 Schritten besteht das Lösen von Log-Ausdrücken?
- ✓ Wie machen Sie eine Basis passend?
- ✓ Durch welchen Punkt verläuft jede Exponentialfunktion (Warum)?
- ✓ Wie kann man eine Ln-Funktion an beiden Achsen spiegeln?
- ✓ Worin besteht der Unterschied zwischen Ergebnis und Lösung?
- ✓ Wie verläuft die ln(x)-Funktion im Vergleich zu Log(x)?
- ✓ Welchen Einfluss hat die Basis auf eine Exponentialfunktion?
- ✓ Was bewirkt das Addieren einer Konstanten zu einer Funktion?
- ✓ Welchen Definitions-/ Wertebereich hat die LN-Funktion?
- ✓ Wie machen Sie die Basis zum Logarithmus passend?

QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine quadratische Gleichung/ Funktion stellt graphisch gesehen immer eine **Parabel** dar $x^2 + p \cdot x + q = 0$.
Um eine quadratische Gleichung lösen zu können, bringt man diese auf die sogenannte **Nullform**.
Die Lösungen dieser Gleichung (**Schnittpunkte mit der x-Achse**) erhält man durch die folgenden Lösungsverfahren:

✓<u>Quadratische Ergänzung</u>: $(x+a)^2 + b = 0 \Rightarrow S(-a;b)$

✓<u>p-q-Formel</u>: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

✓<u>Satz von Vieta</u>: $x^2 + p \cdot x + q = (x+a) \cdot (x+b) = 0$

P-Q-FORMEL

Um die p-q-Formel zu beweisen, nutzt man das Verfahren der quadratischen Ergänzung auf die allgemeine quadratische Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Es ist darauf zu achten, dass zum einen durch **elementare Umformungen** die **NULL-Form** der Gleichung entsteht und zum anderen **kein Faktor** vor dem x^2 auftauchen darf.

<u>Beweis</u>: $x^2 + p \cdot x + q = 0$

Wurzel *Halbierung* *Subraktion des Quadrats*

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \qquad \left| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \right.$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \left| \sqrt{} ; \right| - \frac{p}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

<u>Aufgabe</u>: Entwickeln Sie die Mitternachtsformel basierend auf $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

BEISPIELE

$$2 \cdot x^2 + 8 \cdot x = -6 \Leftrightarrow x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0 \qquad \mid +6; \mid \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 4 \cdot x + 3 = (x+2)^2 - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 1 = 0$$
$$(x+2)^2 = 1 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$
$$x_1 = -3 \vee x_2 = -1$$

quadratische Ergänzung

$$x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0; p = 4 \wedge q = 3$$
$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} = -2 \pm 1$$
$$x_1 = -3 \vee x_2 = -1$$

p-q-Formel

$$x^2 + 4 \cdot x + 3 = x^2 + (3+1) \cdot x + (3 \cdot 1) = 0$$
$$(x+3) \cdot (x+1) = 0$$
$$x_1 = -3 \vee x_2 = -1$$

Satz von Vieta

DIE PARABEL

Bei einer Parabel handelt es sich um die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion. Die relevanten Punkte bzw. der Verlauf kann bereits im Vorfeld näher bestimmt werden.

Allgemeine Form: $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$

✓Verlauf: gestreckt $|\alpha| > 1$ bzw. gestaucht $|\alpha| < 1$
nach oben geöffnet $\alpha > 0$ bzw. nach unten $\alpha < 0$

✓Achsenschnittpunkte: y-Achse: $S_y(0/\gamma)$ bzw. x-Achse: $f(x) = 0$ (p-q-Formel)

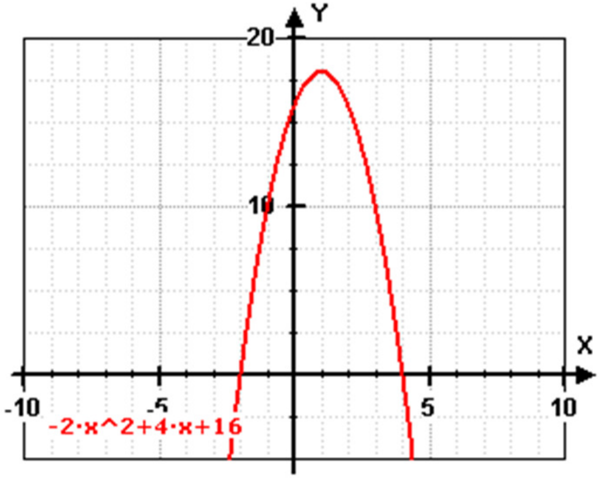
✓Scheitelpunkt: Scheitelpunktform: $f(x) = \alpha \cdot (x + a)^2 + b \Rightarrow S(-a; b)$
Tiefpunkt $\alpha > 0$ bzw. Hochpunkt $\alpha < 0$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \gamma$
Sonst Symmetrie zur parallelen zum Scheitelpunkt

BEISPIEL

Funktionsgleichung:

$f(x) = -2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 16$



✓Verlauf: gestreckt, da $|\alpha| = |-2| > 1$
nach unten geöffnet, da $\alpha = -2 < 0$

✓Schnittpunkte: $S_y(0;16)$
$S_x : 0 = x^2 - 2 \cdot x - 8 = (x-4) \cdot (x+2) \quad S_{x_1}(-2;0); S_{x_2}(4;0)$

✓Scheitelpunkt: $f(x) = -2 \cdot \left((x-1)^2 - 1^2 - 8\right) = -2 \cdot (x-1)^2 + 18$
Scheitelpunkt (Hochpunkt): $S(1;18)$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie zur Parallelen durch $x = 1$

BI-QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine **Bi-Quadratische Gleichung** $x^n + p \cdot x^{\frac{n}{2}} + q = 0$ ist dann vorhanden, wenn zwei Exponenten im Verhältnis 1:2 stehen und eine weitere Konstante existiert.

Nach der **Substitution** der Variablen stehen die bekannten Lösungsverfahren zur Verfügung und man erhält nach **Resubstitution** die Lösungsmenge.

Beispiel: $x^4 - 17 \cdot x^2 + 16 = 0$

<u>Substitution</u>: $z = x^2$

$$z^2 - 17 \cdot z + 16 = (z - 16) \cdot (z - 1) = 0$$

$$z_1 = 16 \vee z_2 = 1$$

<u>Resubstitution</u>: $x = \pm\sqrt{z}$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \vee x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 24 = 0$

2) $-0{,}5 \cdot x^2 + 2 \cdot x = -2{,}5$

3) $x \cdot (2 \cdot x - 20) = -32$

Wenden Sie je ein Verfahren an

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x - 3$

5) $g(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3$

6) $h(x) = 100 - 4 \cdot x^2$

- ✓Verlauf
- ✓Achsenschnittpunkte
- ✓Scheitelpunkt
- ✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Bi-Quadratischen Gleichungen.

7) $x^4 + 100 = 29 \cdot x^2$

8) $x^6 = 7 \cdot x^3 + 8$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $2 \cdot x^2 - 8 \cdot x = 10$

2) $3 \cdot x^2 = 9 \cdot x - 30$

3) $\frac{1}{4} \cdot x^2 + 3 \cdot x + 8 = 0$

Wenden Sie je ein Verfahren an

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 18$

5) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 10 \cdot x + 32$

✓Verlauf
✓Achsenschnittpunkte
✓Scheitelpunkt
✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Bi-Quadratischen Gleichungen.

7) $x^4 - 24 \cdot x^2 = 25$

8) $x^8 + 16 = 17 \cdot x^4$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was versteht man unter der Nullform einer Gleichung?
- ✓ Wie / warum funktioniert der Satz von Vieta?
- ✓ Was sind Linearfaktoren?
- ✓ Warum ist p-q-Formel und quadratische Ergänzung identisch?
- ✓ Warum muss bei der QE stets subtrahiert werden?
- ✓ Wann spricht man von einer biquadratischen Gleichung?
- ✓ Wann sollte man substituieren?
- ✓ Was versteht man unter einer Resubstitution?

(FREPL)-METHODIK

Beim Lösen einer beliebigen Gleichung kann abgesehen von der Fallunterscheidung (F) stets mit folgender Methodik gearbeitet werden:

- ✓ **F**allunterscheidung:
  Je nach Aufgabenstellung muss definiert werden, für welchen Bereich die Betrachtung gilt.
- ✓ **R**echnung:
  Die zugrundeliegende Gleichung wird mittels elementarer Umformungen gelöst.
- ✓ **E**rgebnis:
  Durch die Berechnungen ergeben sich eine oder auch mehrere Ergebnisse.
- ✓ **P**robe:
  Mittels Probe bzw. Abgleich mit dem Definitionsbereich wird der Ergebnisraum untersucht.
- ✓ **L**ösung:
  Aufgrund er Probe kann nun die Lösungsmenge angegeben werden.

BETRAGSFUNKTION I

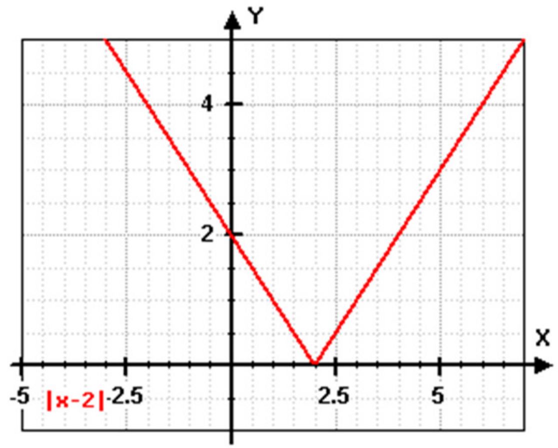
Da es sich bei dem Betrag einer Zahl um die reine **positive** Darstellung handelt, wird sie graphisch als sogenannte **V-Funktion** dargestellt.
Die Betragsstriche können weggelassen werden, in dem man den negativen Bereich mit einem **zusätzlichen Minus** vor dem Term versieht.

<u>Beispiel</u>:

$$f(x) = |x-2|$$

$x < 2$: $f(x) = -(x-2) = -x+2$

$x \geq 2$: $f(x) = x-2$



Aufgrund der Knickstelle ist die Betragsfunktion an der Schnittstelle mit der X-Achse **nicht differenzierbar**, d.h. es kann keine Steigung berechnet werden.

BETRAGSFUNKTION II

Ungleichungen, die auf einer Betragsfunktion basieren, können auch mittels (FREPL)-Methodik gelöst werden.

Beispiel: $|2x-8|>6$

$x>4 \Rightarrow 2x-8>6$	$x \leq 4 \Rightarrow -(2x-8)>6$	Fallunterscheidung
$2x-8>6 \Leftrightarrow 2x>14$ $\Rightarrow x>7$	$-2x+8>6 \Leftrightarrow -2x>-2$ $\Leftrightarrow x<1$	Rechnung
$x>7$	$x<1$	Ergebnis
$x=8 \Rightarrow |2\cdot 8-8|=8>6$	$x=0 \Rightarrow |2\cdot 0-8|=|-8|=8>6$	Probe
$L=\{x\in R \mid x>7 \vee x<1\}$		Lösung

Durch Multiplikation / Division mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

AUFGABEN

I. Skizzieren Sie folgende drei Betragsfunktionen

1) $f(x) = \left| \frac{2}{3}x - 2 \right|$

2) $g(x) = | x^2 - 7x + 12 |$

3) $h(x) = | \cos(x) |$

II. Geben Sie den zugehörigen Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen an.

4) $| 3 - x | < 2$

5) $| 4x - 12 | > 8$

BRUCHUNGLEICHUNGEN

Ungleichungen, die auf einem **Bruch** basieren, können ebenfalls mittels „**FREPL**“ gelöst werden. Da für gewöhnlich im ersten Rechenschritt mit dem **Nenner multipliziert** wird, muss an dieser Stelle die **Fallunterscheidung** genutzt werden, um die Multiplikation mit einem negativen Ausdruck mathematisch korrekt darstellen zu können.

<u>Beispiel</u>: $\frac{3x-2}{x-3} > 2 \qquad | \cdot (x-3)$ Umkehrung des Ungleichheitszeichen

$x > 3 \Rightarrow 3x-2 > 2 \cdot (x-3)$	$x < 3 \Rightarrow 3x-2 < 2 \cdot (x-3)$	Fallunterscheidung
$3x-2 > 2x-6$ $\Leftrightarrow x > -4$	$3x-2 < 2x-6$ $\Leftrightarrow x < -4$	Rechnung
$x > 3$	$x < -4$	Ergebnis
$x = 4 \Rightarrow \frac{3 \cdot 4 - 2}{4-3} = \frac{10}{1} > 2$	$x = -5 \Rightarrow \frac{3 \cdot (-5) - 2}{(-5)-3} = \frac{-17}{-8} > 2$	Probe

$$L = \{x \in R \mid x > 3 \vee x < -4\}$$ Lösung

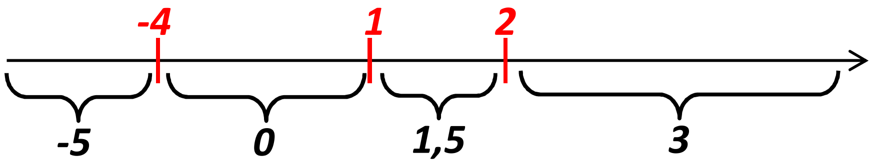
POLYNOMUNGLEICHUNGEN

Handelt es sich um ein Polynom vom Grade >1, so werden im ersten Schritt die Nullstellen der Gleichung bestimmt. Diese gefundenen Ergebnisse repräsentieren die Intervallgrenzen der Ungleichung, wodurch mittels Probe einer Zahl aus dem Intervall die Lösungsmenge bestimmt werden kann (REPL-Methodik).

<u>Beispiel</u>: $x^3 + x^2 - 10x + 8 > 0$ *Polynomdivision liefert:*

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+4) > 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -4$$

Rechnung



Ergebnis

$$x = -5 : (-5-1)\cdot(-5-2)\cdot(-5+4) < 0 \quad \Rightarrow \; \textit{falsch}$$

$$x = 0 : (0-1)\cdot(0-2)\cdot(0+4) > 0 \quad \Rightarrow \; \textit{richtig}$$

$$x = 1{,}5 : (1{,}5-1)\cdot(1{,}5-2)\cdot(1{,}5+4) < 0 \quad \Rightarrow \; \textit{falsch}$$

$$x = 3 : (3-1)\cdot(3-2)\cdot(3+4) > 0 \quad \Rightarrow \; \textit{richtig}$$

Probe

$$L = \{x \in R \mid (x > -4 \wedge x < 1) \vee x > 2\}$$

Lösung

AUFGABEN

I. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben die Lösungsmenge an.

1) $\frac{2x-5}{4-2x} > \frac{1}{2}$

2) $\frac{2x+1}{1+x} \geq 3$

3) $\frac{x \cdot (3+2x)}{6-2x} > 1-x$

4) $x^2 - 8x > 20$

5) $x^3 + x + 6 > 4x^2$

6) $x^4 - x^2 \leq 25 \cdot (x-1) \cdot (x+1)$

AUFGABEN

I. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben die Lösungsmenge an.

1) $\frac{2x-5}{4-2x} > \frac{1}{2}$

2) $x^3 + 3x^2 - 4x < 12$

3) $|2 - \frac{1}{2}x| > 1$

JIPIEHHH, ES IST GESCHAFFT!!!!!