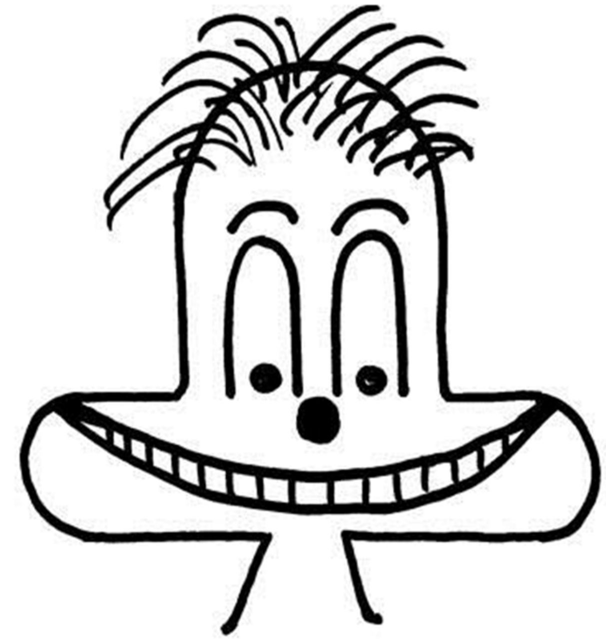
Mathe ist nicht nur begreifbar,

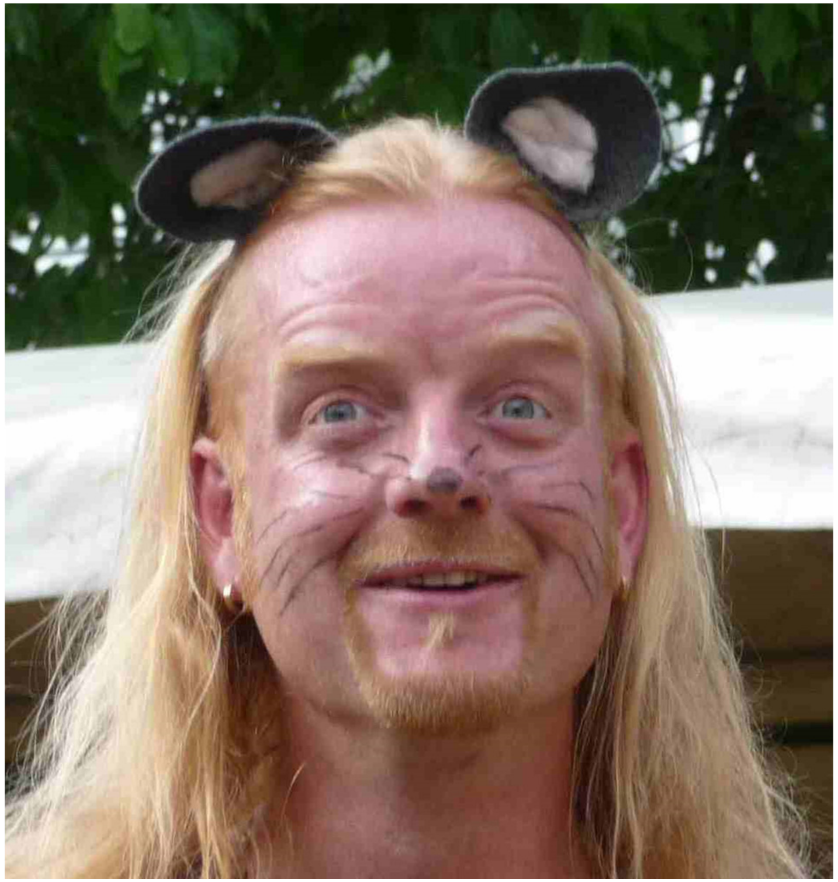


sondern macht sogar Spaß!

Mathematik-Training 2015

Torsten Schreiber

Mathematik ist begreifbar...



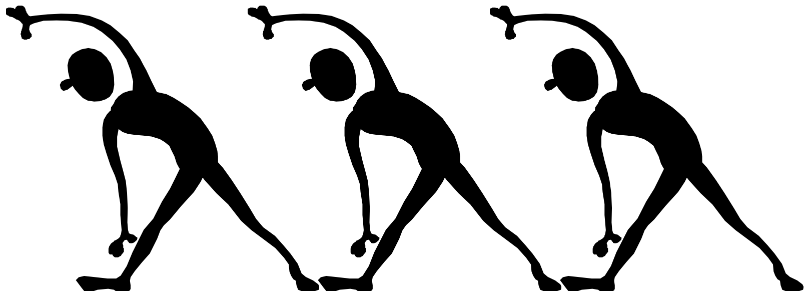
www.mathematik-guru.de

... und macht sogar Spaß!

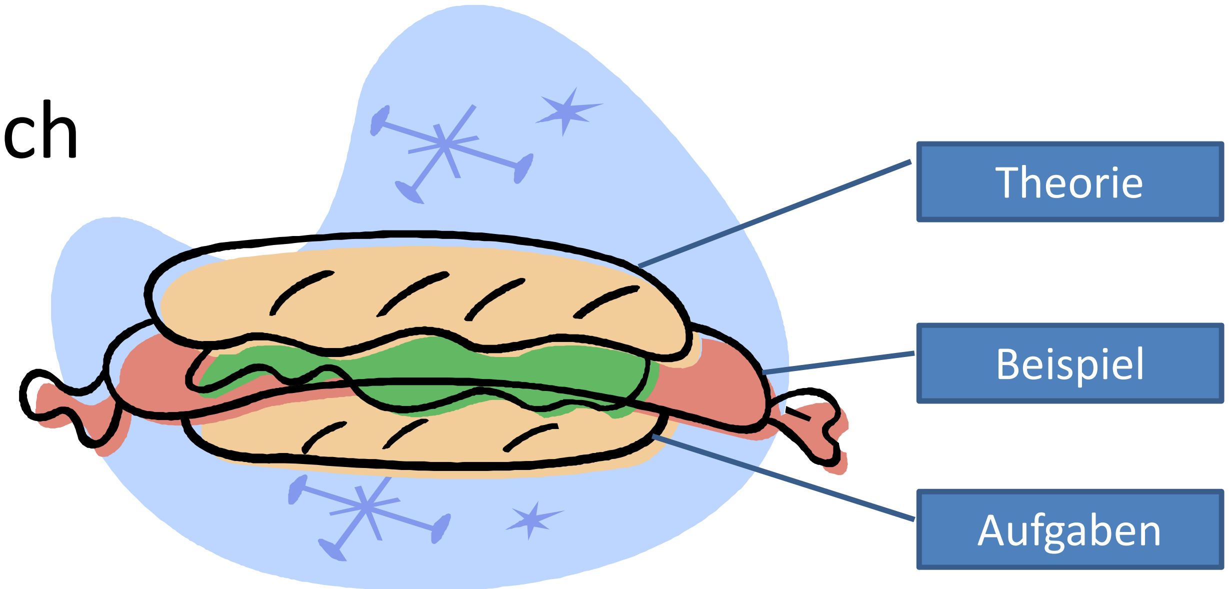
schreiber@mathematik-guru.de

Methodik meiner Veranstaltung

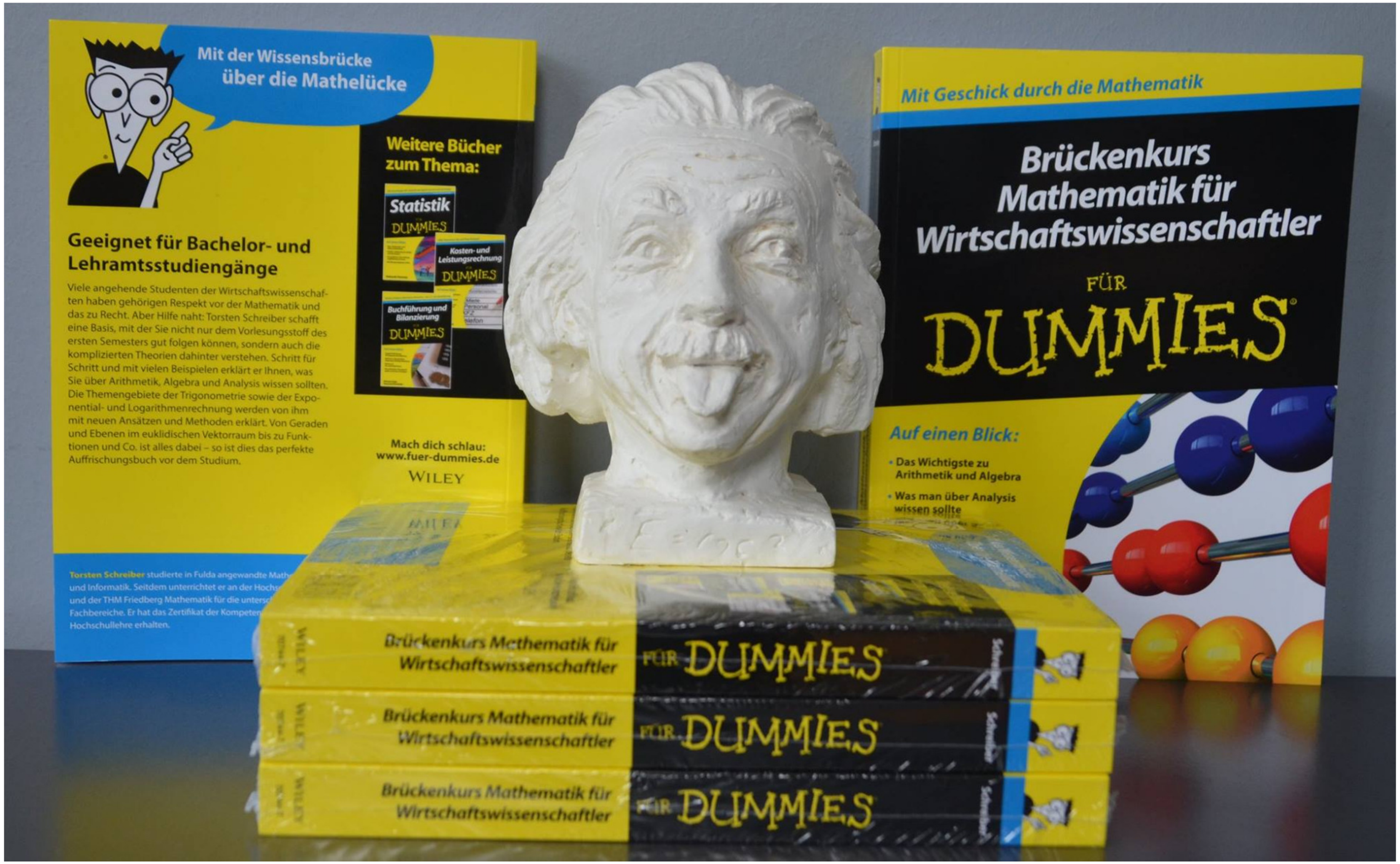
- WarmUp



- n-Sandwich



Mein Buch

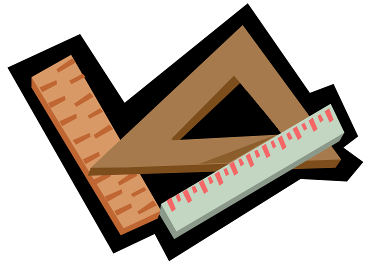


ISBN: 978-3527707447

Themengebiete des Kurses

1. **Mengen**
   Grundlagen / Gesetze und Junktoren
2. **Logik**
   Gesetze, Formalisierung und Wahrheitstabellen
3. **Arithmetik**
   Binomische Formeln und das Pascal‘sche Dreieck
4. **einfache / erweiterte Bruchrechnung**
   Gesetze, Methodiken und Doppelbrüche
5. **Exponential-/ Potenzrechnung**
   ganz- und gebrochen rationale Exponenten
6. **Logarithmenrechnungen**
   Arten des Logarithmus, Gesetze und Graphen
7. **Gleichungen/ Ungleichungen mit einer Unbekannten**
   Rechnungsmethodik FREPL und Grafik
8. **Gleichungen/ Ungleichungen mit 2 Unbekannten**
   Additions-, Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren, grafische Lösung
9. **Trigonometrie**
   Additionstheoreme, Funktionsgraphen und Einheitskreis
10. **Vektorrechnung**
    Geraden und Ebenengleichungen im R^3

Das Training



Theorie der schönen Zahlen

Taschenrechner brauchen wir nicht!

Bücher gehören in die Bibliothek – außer das von mir

Alles was ich geschrieben habe, darf ich auch nutzen.

Vorkursklausur 2013

Name: ______________________________
Mat.-Nr.: ______________________________
Email: ______________________________

1. <u>Mengenlehre (12 Punkte):</u>

Gegeben sind die Menge $A = \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 13; 16\}$ und die Menge B der natürlichen Zahlen (größer 1 und kleiner 18), die durch 2 oder durch 5 teilbar sind.
Bestimmen Sie die Lösungen (2-mal Aufzählung und 2-mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

2. <u>Aussagenlogik (8 Punkte):</u>

Gegeben sind die beiden Ausdrücke $A_1(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z)$ und $A_2(x,y,z) = (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge y)$
Ist die Subjunktion von A_2 auf A_1 allgemeingültig?
Erstellen Sie hierzu eine Wahrheitstabelle und begründen Sie Ihre Antwort.

3. <u>Bruchrechnung (8 Punkte):</u>

a) $2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4x} - \left(\frac{7}{12} + \frac{3}{4}\right)$

b) $\dfrac{\frac{3a}{b} - 2 + \frac{b}{3a}}{\frac{18a}{b} - \frac{2b}{a}}$

4. <u>Arithmetik (8 Punkte):</u>

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $\left(\frac{4}{x^2}\right)^2 \cdot \left(xy^2 + 0{,}5x\right)^4 - 8y^2 \cdot \left(1 + 3y^2 + 4y^4\right)$

b) $-6 \cdot \left(-3x - 2 \cdot \left(y - \left(4x + y - 3 \cdot (2x - y)\right) + z - x\right) - 2 \cdot (3y + z)\right)$

5. <u>Exponential-/Logarithmusrechnung (20 Punkte):</u>

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend (Aufgabe a - auseinanderziehen):

a) $\dfrac{9 \cdot \left(0{,}5 \cdot x^2 y^{-2} z\right)^4}{54 \cdot \left(4 \cdot x^{-2} y^3 z^{-2}\right)^{-3}} : \dfrac{36 \cdot \left(2 \cdot x^2 y^5 z^{-4}\right)^2}{16 \cdot \left(3 \cdot x^4 y^3 z^{-4}\right)^3}$

b) $4^{ld3} - \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{4\ln 0{,}25} + 4 \cdot \log\sqrt{1000} - \frac{1}{2} \cdot ld64 - 0{,}01^{\log 0{,}5} + 12\ln\sqrt[3]{e^2}$

c) $\dfrac{\sqrt[2n]{a^{3n+7}}}{\sqrt{\sqrt[n]{a^{5-2n}}}} \cdot \left(\sqrt[4n]{a^2}\right)^{5n-2}$

d) $3\log x - 2\log\frac{2}{x} - 3\log 4 + 4\log\sqrt{x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\log x^4 - \frac{1}{2}\log 256\right) - \frac{1}{3}\log\frac{1}{8}$

6. Parabelfunktion (8 Punkte):

Berechnen Sie den Scheitelpunkt, die Schnittpunkte mit beiden Achsen und beschreiben den Verlauf der Parabeln.

a) $f(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 16$ b) $f(x) = 3 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 81$

7. Gleichungen mit einer Unbekannten (8 Punkte):

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie – sofern erforderlich – den Definitionsbereich an.

a) $\frac{36x-108}{x-3} = x^3 + 3x^2 - 16x - 12$ b) $x^3 + 5x = 6 \cdot (x^2 - 2)$

8. Lineare Gleichungssysteme (12 Punkte):

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left| \begin{matrix} 2x + y = 3 \\ 2y + 4 = x \end{matrix} \right|$ graphisch

b) $\left| \begin{matrix} -x + 2y - z = -5 \\ x - 3y + 2z = 8 \\ 2x - y + 5z = 13 \end{matrix} \right|$ Gauß-Verfahren

c) $\left| \begin{matrix} \frac{2}{5}x - 4y = -4 \\ 6x - 24y = 12 \end{matrix} \right|$ beliebig

9. Vektoren (8 Punkte):

Bestimmen Sie die Geradengleichungen durch die gegebenen Punkte und bestimmen anschließend die Lage der beiden Geraden zueinander.

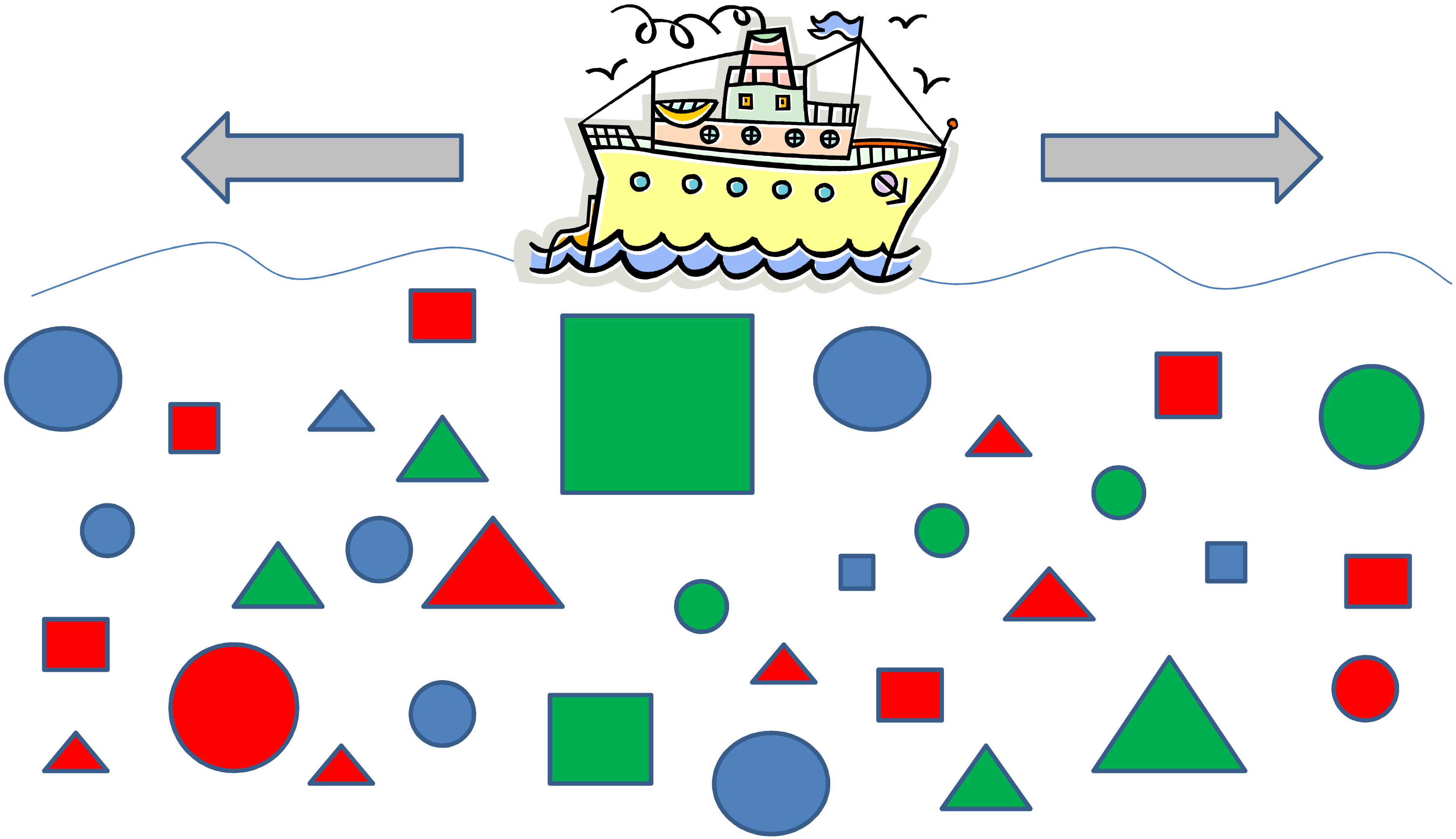
$\vec{a} = (-1;4;-7)^T, \vec{b} = (2;-5;8)^T$ $\vec{c} = (1;-1;1)^T, \vec{d} = (3;-5;7)^T$

10. Trigonometrie (8 Punkte):

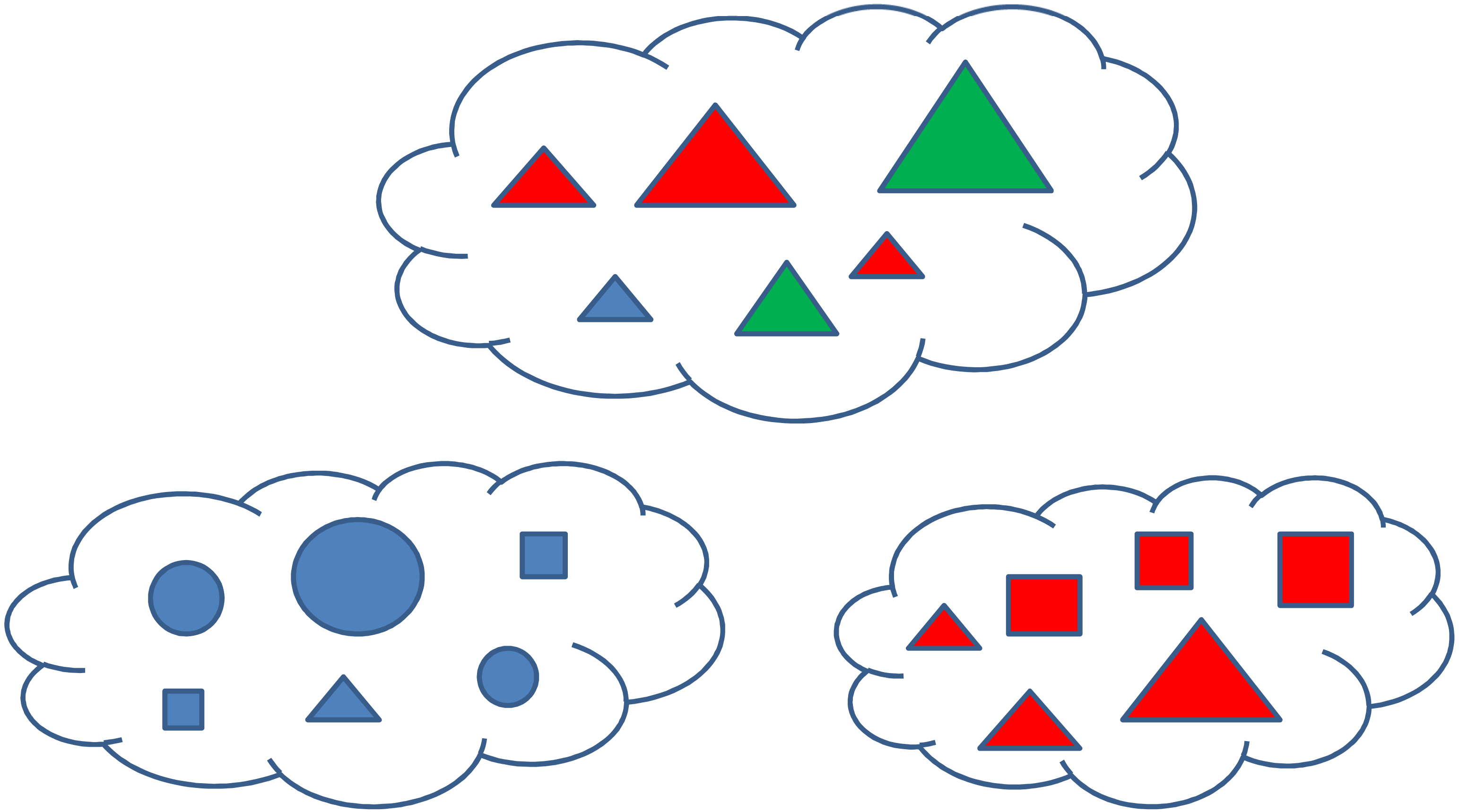
Gegeben sei die Funktion mit $f(x) = 3 \cdot \sin(0{,}25x - 9{,}5\pi) - 5$.

Bestimmen und beweisen Sie die Periode, Symmetrie und Amplituden(Wertebereich) von $f(x)$.

URKNALL DER MATHEMATIK



GRUPPEN VON MENGEN



MENGENDEFINITION

{ Objekt}

{ Menge } **{ Element }** **{ }**

Reihenfolge spielt keine Rolle

Unterscheidbarkeit der Objekte (redundanzfrei)

OBJEKTFORMEN

Objekt	Beschreibung
$\{1,2\}$	
$(1;2)$	
$1,2$	
$\{\{1;2\}\}$	
$(1,2,1,2,1)$	
$\{(1;2)\}$	
$1;2$	
$[1;2[$	
$\{1,2;1;\{2\}\}$	
$\{(1,1,1);(2,2,2)\}$	

DARSTELLUNGSFORMEN I

1) <u>Aufzählung</u>:
   Die einzelnen Objekte werden innerhalb der Menge aufgeführt, wobei Platzhalter in Form von „...“ dargestellt werden.

2) <u>Einschluss</u>:
   Basierend auf einer beliebigen Ausgangsmenge wird ein Gesetz definiert, das die enthaltenden Objekte beschreibt.

3) <u>Ausschluss</u>:
   Aus einer Grundzahlenmenge werden die Objekte definiert, die nicht enthalten sein dürfen.

<u>Beispiel</u>: *Mengen der geraden, natürlichen Zahlen*

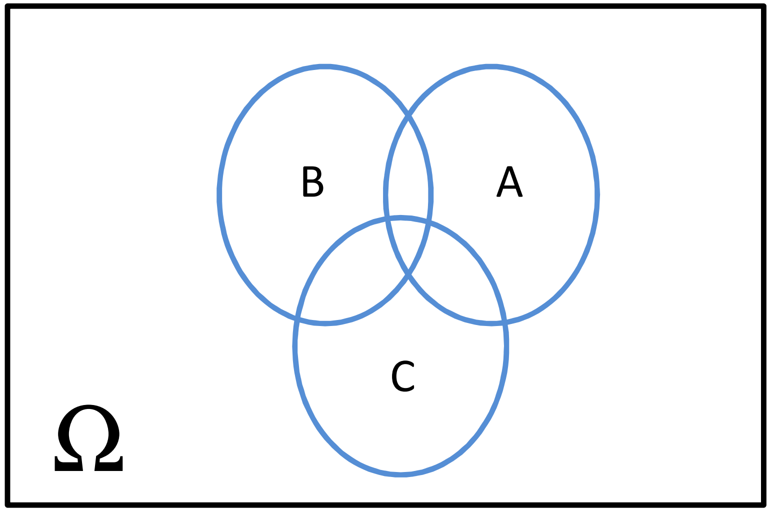
$$1)G_{\mathrm{N}} = \{2;4;6;8;...\}$$

$$2)G_{\mathrm{N}} = \{x \in \mathrm{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$$

$$3)G_{\mathrm{N}} = x \in \mathrm{N} \setminus \{x \in \mathrm{N} \mid x \bmod 2 <> 0\}$$

DARSTELLUNGSFORMEN II

4) <u>Vennsches Diagramm</u>:
Es werden die existierenden Mengen mittels Kreise in die Welt (Kasten) eingetragen.



Die dadurch entstehenden Untermengen sind:

- Vereinigungsmenge (ODER-Verknüpfung)
- Schnittmenge (UND-Verknüpfung)

MODULO

Die Modulo-Funktion entspricht einem Restwertoperator, d.h. bei einer ganzzahligen Division wird der Rest als Ergebnis dargestellt.

$$X \bmod Y = R$$

Zähler Nenner (Divisor) Restwert

<u>Beispiel</u>:

$5 \bmod 2 = 1$, denn $5 \div 2 = 2$ Rest 1

$23 \bmod 5 = 3$, denn $23 \div 5 = 4$ Rest 3

<u>Teilbarkeit</u>: Restwert muss 0 ergeben

$x \bmod 7 = 0$ x ist teilbar durch 7

$x \bmod 2 <> 0$ x ist nicht durch 2 teilbar (ungerade Zahl)

AUFGABEN

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

1) Beschreiben Sie alle durch drei teilbaren Zahlen.

2) Definieren Sie alle Zahlen, die durch vier oder durch 5 teilbar sind.

3) Geben Sie alle Zahlen an, die nicht durch drei teilbar sind.

4) Nennen Sie alle Zahlen zwischen 4 und 42, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind.

5) Welche Zahlen größer als 42 sind durch 7 aber nicht durch 3 teilbar.

TEILMENGE / INKLUSION

Sofern die Ausgangsmenge ein Teil oder komplett innerhalb einer weiteren Menge vorhanden ist, so spricht man von einer Teilmengenbeziehung bzw. von einer Inklusion.

Methodik:

1) Streichen der Mengenklammer bei der Ausgangsmenge

2) Jedes Objekt muss bzgl. Wert und Format in der 2. Menge auftauchen

$$\{a\} \subset Alphabet$$

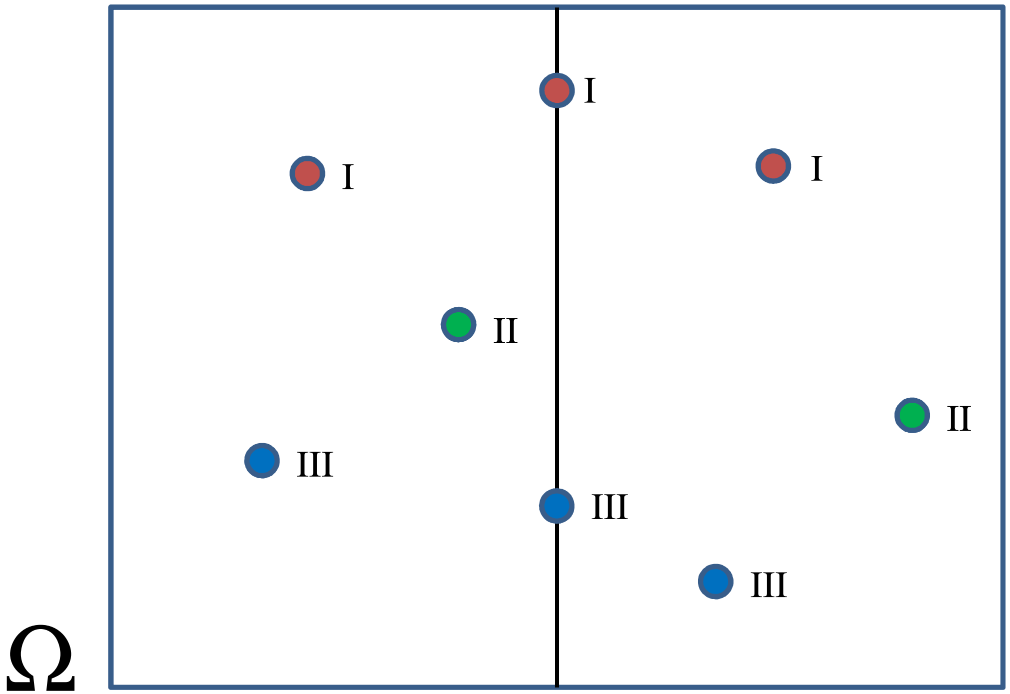
$$\Downarrow$$

$$a \in Alphabet$$

Eigenschaften:

- ✓Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge $\{\ \} \subset A$
- ✓**reflexiv:** Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst $A \subset A$
- ✓**transitiv:** logische Schlussfolgerungen sind zugelassen $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- ✓**antisymmentrie:** Beweisprinzip der Extensionalität $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN



✓Symmetrie (I):
Zu jedem Punkt gehört ein Spiegelpunkt.

✓Asymmetrie (I I):
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt.

✓Antisymmetrie (I I I):
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt aber mindestens ein Punkt auf der Spiegelachse.

Sind mehrere Symmetrievarianten vorhanden, so kann keinerlei Aussage über das Symmetrieverhalten getroffen werden.

JUNKTOREN

Junktoren entsprechen Verbindungen / Operatoren die beliebige Objekte miteinander verknüpfen können (Artithmetik: „+“, „-“, „*“, „:“).

<u>UND</u> $(A \cap B)$:
Das Objekt der Lösung gehört gleichzeitig zu den Menge A und B. (*Durchschnitt*)
Beispiel: Primzahl $\cap$ gerade, natürliche Zahl $=\{2\}$

<u>ODER</u> $(A \cup B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A oder B oder zu A und B. (*Vereinigung*)
Beispiel: ungerade Zahl $\cup$ gerade, natürliche Zahl = $\mathbb{N}$

<u>NICHT</u> $(A \setminus B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A aber nicht zu B. (*Differenz*)
Beispiel: natürliche Zahl $\setminus$ gerade, natürliche Zahl = ungerade Zahl

AUFGABEN

1) Gegeben sind die folgenden Mengen: $A=\{2;4;6;8;10\}$ $B=\{1;2;3\}$ $C=\{2;3;5;7;\}$
Berechnen Sie: $A\cup(B\cup C)$ $B\cap C\setminus A$ $(A\cap B)\cap(C\cap A)$ $A\setminus(B\cup C)$

2) Über die Anzahl *n* der Elemente in der Untermenge A, B und C einer Menge mit 200 Elementen ist folgendes bekannt:
$n(A)=70$ $n(B)=120$ $n(C)=90$ $n(A\cap B)=50$ $n(A\cap C)=30$ $n(B\cap C)=40$
$n(A\cap B\cap C)=20$
Wie groß ist die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen?
$n(A\cup B)$ $n(A\cup B\cup C)$ $n(\overline{A}\cap B\cap C)$ $n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

3) Gegeben sind die Mengen der durch 5 teilbaren, ganzen Zahlen A und die Menge B mit {-10, -9, -8…8, 9, 10}. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Aussagen als Aufzählung und unter Verwendung der Eigenschaften bzgl. der ganzen Zahlenmenge:
a) $A\cap B$ b) $A\cup B$ c) A\B d) B\A

4) Gegeben sind die Menge $A=\{x\in\Re \mid 42\le x<50\}$ und die Menge B der durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen (kleiner 45). Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):
a) $A\cap B$ b) $A\cup B$ c) A\B d) B\A

ZAHLENMENGEN

$N \rightarrow$	Natürliche Zahlen	$\{1;2;3...\}$
$Z \rightarrow$	Ganze Zahlen	$\{...-2;-1;0;1;2...\}$
$Q \rightarrow$	Rationale Zahlen	$\frac{a}{b};a \in Z \wedge b \in Z \setminus \{0\}$ *Endliche Nachkommastellen, Periode*
$R \rightarrow$	Reelle Zahlen	$\{\pi; e; \sqrt{2};...\}$ *Unendliche Nachkommastellen*
$C \rightarrow$	Komplexe Zahlen	$z = a + b \cdot i \wedge i = \sqrt{-1}$

GESETZE / ZUSAMMENHÄNGE

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan:	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Komplement:	$\overline{A} \cap A = \{\ \}$	$\overline{A} \cup A = \Omega$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

<u>Zusammenhänge</u> zwischen $A; \{\ \}; \Omega$

$\cap$: $A \cap A = A$ $\quad A \cap \Omega = A$ $\quad A \cap \{\ \} = \{\ \}$

$\cup$: $A \cup A = A$ $\quad A \cup \Omega = \Omega$ $\quad A \cup \{\ \} = A$

Neutrales Objekt: $A \cap \Omega = A$ $\quad A \cup \{\ \} = A$

AUFGABEN

Beweisen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benennung aller angewandten Gesetze

1) Das Absorptionsgesetz $A \cap (A \cup B) = A$

2) Das De Morgangesetz $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ mittels Komplement

3) Vereinfachen Sie die Robbinsgleichung: $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup \overline{B}}}$

1. <u>Mengenlehre (12 Punkte):</u>

Gegeben sind die Menge A mit $A = \{8;10;12;14;16;20;22;26;28;30\}$ und die Menge B der natürlichen Zahlen (größer 2 und kleiner gleich 30), die durch 2 und gleichzeitig durch 3 teilbar sind.
Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

KLASSENEINTEILUNG / ZERLEGUNG

Man spricht von einer Klasseneinteilung, sofern sicher gestellt werden kann, dass jedem Objekt aus der definierten Welt einer Klasse (Untermenge) zugeordnet werden kann.

UND-Verknüpfung:
Die UND-Verbindung zwischen jeder Klasse muss jeweils die leer Menge als Lösung haben. Man spricht dann von disjunkten Mengen.

ODER-Verknüpfung:
Die ODER-Verbindung zwischen allen Klassen muss zu einer Menge führen, die alle Objekte der definierten Ausgangsmenge enthält.

Beispiel: *Alphabet*

UND-Verknüpfung: $Konsonat \cap Vokal = \{\ \}$

ODER-Verknüpfung: $Konsonat \cup Vokal = Alphabet$

POTENZMENGE

Eine Potenzmenge ist eine Ansammlung von allen möglichen Teilmenge basierend auf einer beliebigen Menge A.

Da jedes Objekt der Ausgangsmenge zwei Möglichkeiten besitzt, nämlich zu der Teilmenge zu gehören oder nicht, besteht jede Potenzmenge aus 2^n Untermengen.

Die Teilmengen existieren von der Länge Null (leere Menge) bis zu der Länge *n* (Anzahl der Objekte in der Ausgangsmenge).

<u>Beispiel:</u> $A = \{a;b;c;d\}$

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \{\ \}; \\ \{a\};\{b\};\{c\};\{d\}; \\ \{a;b\};\{a;c\};\{a;d\};\{b;c\};\{b;d\};\{c;d\}; \\ \{a;b;c\};\{a;b;d\};\{a;c;d\};\{b;c;d\}; \\ \{a;b;c;d\} \end{array} \right\} \quad 2^n = 2^4 = 16 \text{ Untermengen}$$

KARTESISCHES PRODUKT

Das kartesische Produkt wird mittels Kreuzprodukt aus beliebigen Mengen gebildet, wobei jedes Objekt der linken Menge mit jedem weitern Objekt übrigen Mengen kombiniert wird.

Als Ergebnis entsteht ein n-dimensionales Tupel $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$.

Die entstehende geordnete Punktmenge ist **nicht kommutativ**.

Der Euklidische Vektorraum lässt sich als kartesische Produkt somit wie folgt darstellen: $\Re^3 = \Re x \Re x \Re = (x_1, x_2, x_3)$

Beispiel: $A = \{a; b; c\}$ $B = \{1;2;\}$

$$AxB = \{(a,1);(a,2);(b,1);(b,2);(c,1);(c,2);\}$$

$$BxA = \{(1,a);(1,b);(1,c);(2,a);(2,b);(2,c);\}$$

AUFGABEN

1) Gegeben sei die Menge $A = \{42; \{x; y\}, \{\ \}\}$.
   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) x \in A$ $\quad b) \{x; y\} \subset A$ $\quad c) \{42\} \subset A$ $\quad d) \{42\} \in A$ $\quad e) 42 \in A$

   $f) 42 \subset A$ $\quad g) \{\ \} \in A$ $\quad h) \{\ \} \subset A$ $\quad i) \{\{\ \}\} \subset A$ $\quad j) \{4\} \subset A$

2) Welche der folgenden Aussagen über eine Potenzmenge $P(A)$ und einer Menge *A* sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) A \in P(A)$ $\quad b) A \subset P(A)$ $\quad c) \{\ \} \in P(A)$ $\quad d) \{\ \} \subset P(A)$

   $e) \{A\} \in P(A)$ $\quad f) \{A\} \subset P(A)$ $\quad g) \{\{\ \}\} \subset P(A)$ $\quad h) \{\{\ \}\} \in P(A)$

3) Bilden Sie die Potenzmenge basierend auf der Menge $A = \{\otimes; \nabla; \infty; \pi\}$.

AUFGABEN

4) Gegeben sei die Menge $A = \{\{\ \}; a; \{1;3\}; 5; \{5\}\}$.
Welche der folgenden Untermengen sind Zerlegungen von *A* (Begründung)?

$a)\{\{a\}; \{1;3\}; \{\{\ \}\}; \{5\}\}$ $b)\{\{a\}; \{1;3\}; \{\ \}; \{5; \{5\}\}\}$ $c)\{\{a; \{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{5; \{5\}\}\}$

$d)\{\{a\}; \{\{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{\{5\}\}; \{5\}\}$ $e)\{\{5; a; \{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{5\}\}$

5) Gegeben sei die Menge $A = \{\alpha; \beta; \varepsilon\}$, $B = \{I; V\}$ und die Menge $C = \{x; y\}$.
a) Bilden Sie das kartesische Produkt AxBxC.
b) Bilden Sie das Kreuzprodukt aus AxB sowie aus CxA (grafische Darstellung).

6) Ermitteln Sie die gefragten Lösungsmengen aufgrund des gegebenen Venn‘schen Diagramms.

$a) A \cup C$

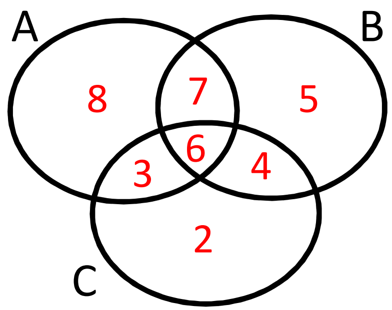
$b) A \setminus (B \cup C)$

$c) (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$d) (A \cup B) \setminus C$

$e) (A \cap B) \setminus (A \cup C)$

$f) (C \cup A) \cap (B \cup C)$



Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wiederholung

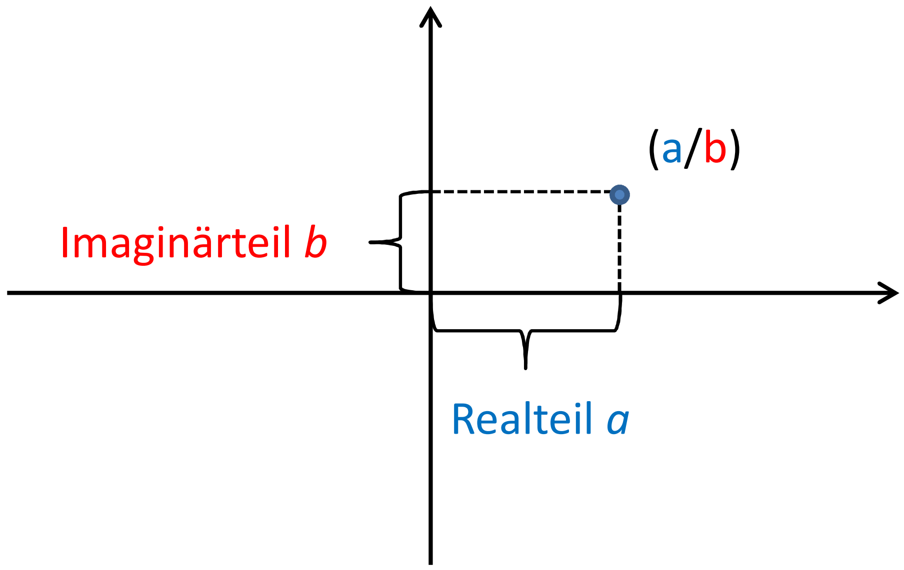
Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Welche Objekte können in einer Menge vorhanden sein?
- ✓ Was für Gesetze gelten bzgl. einer Menge?
- ✓ Wie können Sie Mengen darstellen?
- ✓ Was ist ein Tupel?
- ✓ Wie ist die Eigenschaftdefinition einer Menge aufgebaut?
- ✓ Wie beschreibt man die Teilbarkeit von Zahlen?
- ✓ Wie sind die Zahlenmengen der Arithmetik definiert?
- ✓ Was verstehen wir unter der Inklusion und wie funktioniert sie?
- ✓ Welche 4 wichtigen Eigenschaften besitzt die Teilmenge?
- ✓ Was gibt es für verschiedene Symmetrien?
- ✓ Welche Gesetze gibt es in der Mengenlehre / Arithmetik?

KOMPLEXE ZAHLEN I

$$z = a + b \cdot i ; i = \sqrt{-1}$$

Realteil Imaginärteil

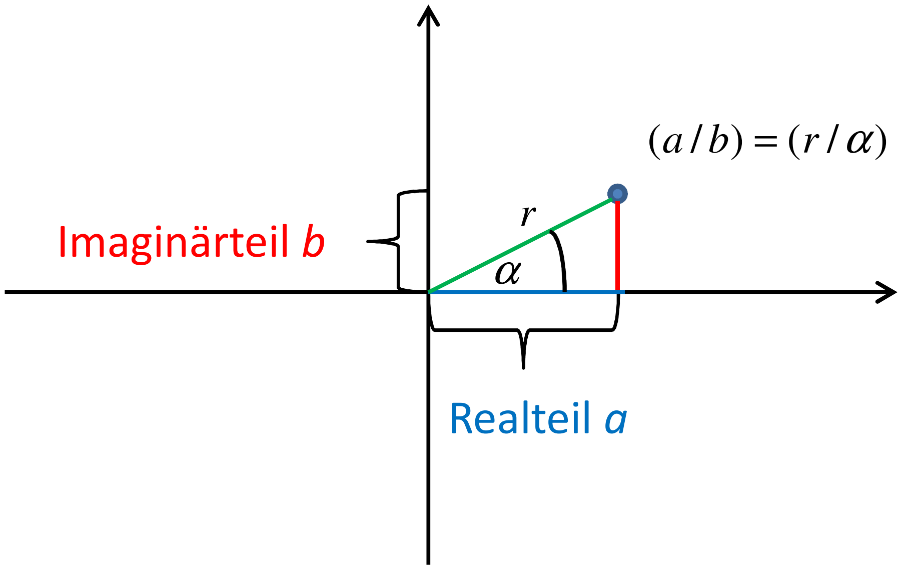


$$i^{0+4\cdot n} = 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 0$$
$$i^{1+4\cdot n} = i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 1$$
$$i^{2+4\cdot n} = (-1) \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 2$$
$$i^{3+4\cdot n} = (-1) \cdot i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 3$$

<u>Beispiel:</u>

$$(3+2i)+(7-5i)=(3+7)+(2-5)i = 10-3i$$
$$(3+2i)\cdot(7-5i)=(3\cdot 7)+(3\cdot(-5i))+(2i\cdot 7)+(2i\cdot(-5i))=21-15i+14i-10i^2 = 31-i$$
$$2i^3\cdot(3+2i)^2 = -2i\cdot(9+12i+4i^2) = -2i\cdot(5+12i) = 24-10i$$

KOMPLEXE ZAHLEN II



a = Ankathete

b = Gegenkathete

r = Hypotenuse

Betrag: $r=\sqrt{a^2+b^2}$

Argument: $\alpha = \arctan\frac{b}{a} + x \begin{cases} a>0 \wedge b>0 \Rightarrow x = 0\pi \\ a>0 \wedge b<0 \Rightarrow x = 2\pi \\ a<0 \wedge b>0 \Rightarrow x = \pi \\ a<0 \wedge b<0 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$

KOMPLEXE ZAHLEN III

Darstellung einer komplexen Zahl:

✓<u>Kartesische Darstellung:</u> $z = a + b \cdot i$

✓<u>Trigonometrische Darstellung:</u> $z = r \cdot \left(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\right)$

✓<u>Exponentielle Darstellung:</u> $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Beispiel: $z = 3 - 4 \cdot i$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 360 \approx 307° \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 5 \cdot \left(\cos(307) + i \cdot \sin(307)\right) \\ z = 5 \cdot e^{i \cdot 307} \end{array}$$

KOMPLEXE ZAHLEN IV

Die konjugiert komplexe Zahl:

Um den Imaginärteil einer komplexen Zahl zu beseitigen , wird mittels des 3. Binoms der Ausdruck erweitert (konjugiert komplexen Zahl).

$$z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - \left(-b^2\right) = a^2 + b^2$$

Betrag: $z = 2 - 5i \Rightarrow \overline{z} = 2 + 5i$

$$r = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(2 - 5i) \cdot (2 + 5i)} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Division: $\dfrac{9 - 2i}{3 + i} \cdot \dfrac{3 - i}{3 - i} = \dfrac{27 - 6i - 9i + 2i^2}{3^2 - i^2} = \dfrac{25 - 15i}{10} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} i = 2{,}5 - 1{,}5i$

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels kartesischer Form an. Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

$$1)\ (1-2i)^3 \cdot \left[(3-i)\cdot(2i+6)\cdot i\right]$$

$$2)\ \frac{3+2i}{4-i}+\frac{-12-3i}{2i-3}$$

$$3)\ (2+3i)^2 \cdot 2(1-2i)^2 \cdot i^{13}$$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?