

ÜBUNGEN ZU MATHEMATIK (DM B.SC.), BLATT 3

1. Gegeben seien die Mengen $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ und die Funktion $f : X \rightarrow Y$, $x \mapsto f(x) = x^2$.
 - a) Geben Sie alle weiteren in der Vorlesung aufgeführten Darstellungen für f an.
 - b) Bestimmen Sie $f(X)$, $f(\{-1, 0, 1\})$, $f^{-1}(\{1, 2, 3\})$, $f^{-1}(\{10\})$, $f^{-1}(\{1, \dots, 9\})$.
 - c) Begründen Sie, ob die Funktion f injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

2. Welche der folgenden (verbal definierten) Abbildungen sind injektiv?
 - a) 369 zufällig ausgewählten Menschen wird ihr Geburtsdatum im laufenden Jahr zugeordnet.
 - b) Jedem Menschen auf der Erde wird sein Fingerabdruck zugeordnet.
 - c) Jedem Buch, das nur einen Autor hat, wird sein Autor zugeordnet.
 - d) Jedem Menschen auf der Erde wird die Anzahl der Haare, die er auf dem Kopf hat, zugeordnet. (**Hinweis:** Ein Mensch hat etwa zwischen 0 und 200000 Haare auf dem Kopf; Es gibt mehr als 7 Mrd. Menschen auf der Erde.)

3. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = -3x + 12$ auf dem Definitionsbereich \mathbb{R} . Begründen Sie die Bijektivität von f und bestimmen Sie f^{-1} .

4. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, seien definiert durch $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = e^{x^2}$.
 - a) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.
 - b) Was können Sie über das Symmetrieverhalten von f und $f \circ g$ aussagen?

5. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1 \\ x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$. Begründen Sie, dass f eine Funktion ist, und ob f surjektiv/injektiv ist. Ändert sich daran etwas, wenn man \mathbb{N}_0 statt \mathbb{N} nimmt?

6. Zeigen Sie mit der ε - δ -Definition, dass die Funktion $f(x) = -3x + 12$ aus Aufgabe 3
 - a) an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist.
 - b) in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.