Graphische Interpretation von Grenzwerten I

Asymptoten:

→ Näherungsgraph, an die sich die Funktion anschmiegt

→ Entstehen durch die Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

a) waagerechte Asymptote: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = k$

b) senkrechte Asymptote: $\lim\limits_{x \to k} f(x) = \infty$

c) diagonale Asymptote: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

d) behebbare Lücke: $\lim\limits_{x \to k} f(x) = k$

1) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 - 10x - 12}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12} \quad \text{Nenner} \to \neq 0 \quad \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; 2\}$

$$f(x) = \frac{2(x+1)(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-2)(x+3)} \Rightarrow f_e(x) = \frac{2\cdot(x+1)}{(x+2)}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3/2$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^-} f(x) = 4$$

} behebbare Lücke

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x\cdot(2+\overbrace{1/x}^{\to 0})}{x(1+\underbrace{2/x}_{\to 0})} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(2+\overbrace{1/x}^{\to 0})}{x\cdot(1+\underbrace{2/x}_{\to 0})} = 2$$

} waagerechte Asymptote

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) \approx \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

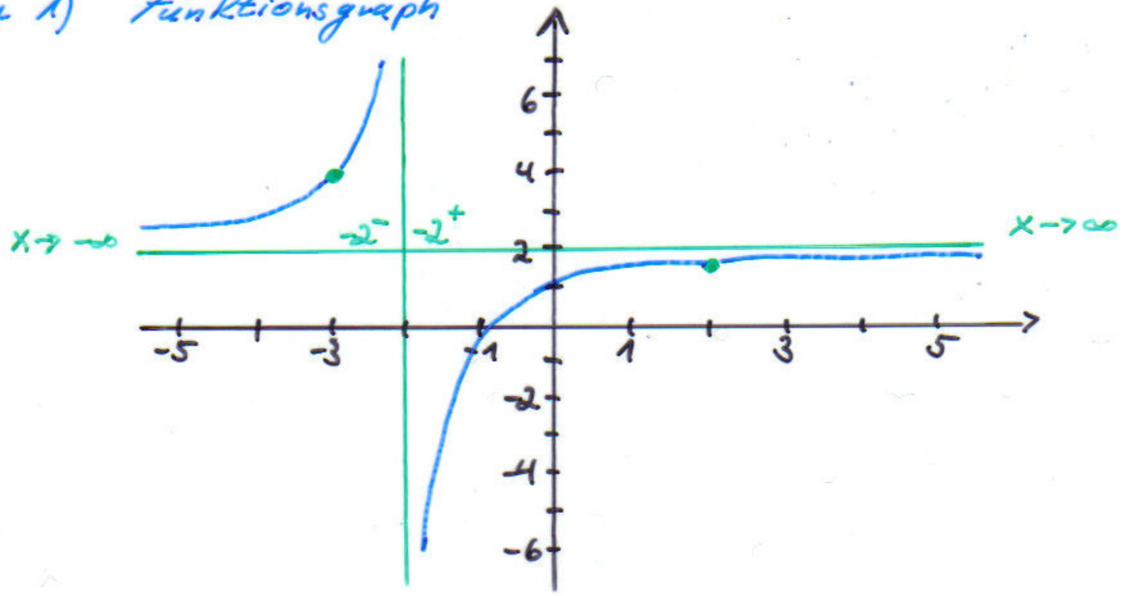
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) \approx \left[\frac{-2}{0^-}\right] = \infty$$

} senkrechte Asymptote

Polstelle mit VZW

Graphische Interpretation von Grenzwerten II

zu 1) Funktionsgraph



2) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x-3}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$-\infty \qquad \to 3 \leftarrow \qquad \infty$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \left[\frac{-5}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty \end{aligned}\right\}$$ senkrechte Asymptote

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})}{x(1-3/x)} = [x] = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow (x^2-2x-8)(x-3) = \underbrace{x+1}_{\text{diagonale Asymptote}} + \dfrac{-5}{x-3}$

$-(x^2-3x)$

$/ \quad x-8$

$-(x-3)$

$/ \quad -5$

$f(0) = 8/3$

$f(x) = 0$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+8}$

$x_1 = 4$; $x_2 = -2$